I — BILAN FEUILLE 1 révision MPSI

Exercice 1

On rappelle les opérations ensemblistes : $\cap, \cup$, passage au complémentaire, et produit cartésien.
Sur les opérations ensemblistes : on rappelle que :

- l'intersection quelconque d'espaces vectoriels est un espace vectoriel (question de cours).
  D'ailleurs, si A est une partie de E, on définit $Vect(A)$ comme l'intersection de tous les sev de E contenant la partie A.
- le complémentaire d'un sev n'est jamais un sev, car il ne contient jamais le vecteur nul.
- le produit cartésien de 2 $\mathbb{K}$-e.v. est un $\mathbb{K}$-e.v. pour la structure produit.
- l'union de sev est un sev ssi l'un des sev contient tous les autres (c'est le cas particulier de 2 sev qui est traité dans cet exercice).

La démonstration par l'absurde n'est pas indispensable : on peut écrire :
"Soient F et G des sev de E tels que $F \cup G$ est un sev et F n'est pas inclus dans G. Montrons que G est inclus dans F.
Soit $g \in G$. Il existe f tel que $f \in F \setminus G$. Alors $f+g \in F \cup G$. Mais $f+g \notin G$, donc $f+g \in F$ et finalement $(f+g)-f = g \in F$ donc $G \subset F$."
Remarque : ce résultat est en réalité un résultat d'algèbre de groupes ! Si F et G sont des sous groupes (ici additifs) de E, alors $F \cup G$ est un sous groupe de E ssi l'un des sous groupe contient l'autre.

Exercice 2-3-4

Pour montrer qu'une famille est libre, on se ramène au fait que toute sous famille FINIE est libre.
Pour démontrer qu'une famille $\mathcal{F}$ de n éléments est libre pour tout $n \in \mathbb{N}$, on procède souvent par récurrence.
Il faut alors écrire : "Soit $n \in \mathbb{N}$ et P_n la propriété : " toute sous famille $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de $\mathcal{F}$ est libre."
La récurrence s'amorce dès que $\mathcal{F}$ ne possède pas l'élément nul (toute famille (e) avec e non nul est libre).
Pour l'hérédité, on ordonne généralement $(e_1, \dots e_n, e_{n+1})$ (par exemple par degré, par comparaison de fonctions,...), on écrit :
"soient $\lambda_1, \dots \lambda_n, \lambda_{n+1}$ tels que $\sum \lambda_i e_i = 0$. Alors (...) nécessairement $\lambda_{n+1} = 0$ et par hypothèse de récurrence, $\forall i, \lambda_i = 0$. Récurrence établie."
Astuces : pour montrer que $\lambda_{n+1} = 0$, on peut :

- évaluer une fonction en un point particulier,
- factoriser par un terme de plus au degré ou de comportement asymptotique dominant,
- dériver une fois, deux fois ou plus l'égalité jusqu'à pouvoir appliquer l'un des 2 premiers points.
- utiliser des propriétés de régularité (la fonction nulle est continue, dérivable, C^∞...)

Exercice 5

Un espace vectoriel peut être décrit de plusieurs manières :

- à partir d'un système générateur : $F = Vect(e_1, e_2, \dots, e_n)$.
- de manière paramétrique : $F = \{\sum \lambda_i e_i | (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n\}$
- par une équation cartésienne : $F = \{(x_1 \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n | f_1(x_1, \dots x_n) = (...) = f_p(x_1, \dots, x_n) = 0\}$.

Il faut savoir passer de l'un à l'autre.
Ici, pour passer d'un équation cartésienne à un système générateur, il suffit de **résoudre** le système linéaire par pivot de Gauss.

Exercice 6, 7, 8

En dimension finie, on rappelle que tout s.e.v. admet **au moins** UN supplémentaire (existence, mais pas unicité !). Tous les supplémentaires de F ont même dimension égale à la codimension de F.
En fait, c'est encore vrai en dimension infinie (sauf pour l'histoire de la codimension qui n'a plus de sens.
Au passage, si E est en pls muni d'un produit scalaire, on a vu que tout s.e.v. de dimension finie admet un **unique supplémentaire orthogonal**.
Pour démontrer que F et G sont supplementaires, il faut montrer 2 choses :

- que $F \cap G = \{0\}$ (jamais vide) : en général facile : on commence toujours par ça.

— que $E = F + G$: soit $e \in E$, cherchons $f \in F$ et $g \in G$ tels que $e = f + g$: demande plus de travail et de réflexion : on peut utiliser un théorème d'existence d'un autre chapitre (existence d'un développement limité, d'une division euclidienne, etc...) ou bien faire une analyse à partir des propriétés de f et g.

Souvent, il est utile de tester le résultat sur des exemples (prendre une fonction, un polynôme, une suite e et trouver f et g correspondants).

Exercice 9

L'opérateur de dérivation est défini sur $E = \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{K})$ de manière à être un endomorphisme qu'on peut itérer pour la composition.
On retient que le noyau est l'ensemble des fonctions constantes (donc n'est pas injectif), et que son image est E (donc est surjectif).
On pourra s'intéresser à son spectre ($Sp(\delta) = \mathbb{K}$).
On a un exemple d'un **endomorphisme surjectif mais pas injectif**!
Cela ne met pas en défaut le théorème du rang qui n'est valable qu'en dimension finie...

Exercice 10

Avant tout, vérifier consciencieusement la linéarité de la fonction.
Ensuite, pour étudier l'injectivité d'une **application linéaire**, il suffit d'étudier son noyau !
$\rightsquigarrow$ **Exercice :** montrer que f linéaire est injective ssi $Ker(f) = \{0\}$.
Pour la surjectivité, on peut utiliser des arguments de dimension (théorème du rang) **lorsqu'on est en dimension finie**.
Sinon, il faut bricoler des antécédents à la main ! (ce qui revient à résoudre des systèmes linéaires) ou bien trouver au moins un élément de l'ensemble d'arrivée qui n'a pas d'antécédent.

Exercice 11, 12

On rappelle que p est une projection ssi p est linéaire et $p \circ p = p$.
On rappelle que s est une symétrie ssi s est linéaire et $s \circ s = Id_E$.
Toute projection (resp. toute symétrie) est diagonalisable en appliquant le lemme des noyaux au polynôme annulateur scindé à racines simples $X^2 - X = X(X-1)$ où X et $X-1$ sont premiers entre eux. (resp. au polynôme annulateur scindé à racines simples $X^2 - 1 = (X+1)(X-1)$ où $X+1$ et $X-1$ sont premiers entre eux.)
Pour montrer que les espaces $E_1, \dots E_n$ sont en somme directe supplémentaires :

— pour montrer qu'ils sont en somme directe, on pose $x_1, \dots x_n$ tels que $x_i \in E_i$ et tels que $x_1 + \dots + x_n = 0$ et on montre que $\forall i, x_i = 0$.
(plus facile en général : commencer par ça).

— pour montrer qu'ils sont en somme total, on fixe $x \in E$ et on trouve $x_1, \dots x_n$ tels que $x_i \in E_i$ et $\sum x_i = x$.

Exercice 13, 14

Résultat classique d'endomorphismes qui commutent. Plus généralement, on a vu en MP que si u et v commutent, les espaces propres et caractéristiques de u sont stables par v...

Exercice 15

Là aussi résultat classique sur les espaces cycliques.
Ce résultat permet :

— de décomposer l'espace en somme directe d'espaces cycliques avec des matrices associées qui sont des matrices compagnes.

— démontrer le th. de Cayley Hamilton par produit de déterminants de matrices compagnes (polynôme caractéristique = polynôme compagnon).