Banque exos 5/2

Exercice 1 ⋆⋆⋆ : Sup sur les polynômes : *(1)*

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose

$$\|P\|_A = \sup_{x\in A} |P(x)|.$$

Quelles conditions A doit-elle satisfaire pour que l'on obtienne une norme sur $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 2 ⋆⋆⋆ : Deux normes équivalentes sur $\mathcal{C}^1$ *(2)*

Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. On définit

$$N(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty,\ N'(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

1. *Démontrer que N et N' sont deux normes sur E.*
2. *Démontrer que N et N' sont équivalentes.*
3. *Sont-elles équivalentes à $\|\cdot\|_\infty$?*

Exercice 3 ⋆⋆ : Suites extraites - pour bien comprendre... *(3)*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. *Parmi les suites ci-dessous, trouver celles qui sont extraites d'une autre :*

$$(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}},\ (u_{3n})_{n\in\mathbb{N}},\ (u_{6n})_{n\in\mathbb{N}},\ (u_{3.2^n})_{n\in\mathbb{N}},\ (u_{3.2^{n+1}})_{n\in\mathbb{N}}, (u_{2^n})_{n\in\mathbb{N}},\ (u_{2^{n+1}})_{n\in\mathbb{N}}.$$

2. *Soit $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que toute suite extraite de $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Exercice 4 ⋆⋆⋆ : Suites extraites vérifiant certaines propriétes *(4)*

Soit (u_n) une suite de nombre réels.

1. *On suppose que (u_n) est croissante et qu'elle admet une suite extraite majorée. Que dire de (u_n) ?*
2. *On suppose que (u_n) est croissante et qu'elle admet une suite extraite convergente. Que dire de (u_n) ?*
3. *On suppose que (u_n) n'est pas majorée. Montrer qu'elle admet une suite extraite qui diverge vers $+\infty$.*

Corrigé 1

En particulier, il faut $\|X\|_A < +\infty$. Nécessairement A est donc une partie bornée.
De plus, A ne doit pas être de cardinal fini. En effet, si $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, le polynôme $P = (X-a_1)\cdots(X-a_n)$, alors $P \neq 0$ et pourtant $\|P\|_A = 0$...
Réciproquement si A est une partie infinie bornée, alors montrons que $\|.\|_A$ est une norme.

1. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, $\|P\|_A$ est bien un nombre réel.
2. $\|.\|_A$ est bien positive et définie car le seul polynôme qui admet une infinité de racines est le polynôme nul.
3. on montre de manière classique (mais rigoureuse) que $\sup_{x\in A} |\lambda P(x)| = |\lambda| \sup_{x\in A} |P(x)|$
4. pour tout $x \in A$, $|P(x) + Q(x)| \leqslant |P(x)| + |Q(x)| \leqslant \|P\|_A + \|Q\|_A$. En passant au sup, on obtient bien l'inégalité triangulaire.

Corrigé 2

1. Comme f et f' sont continues sur le segment $[0,1]$, $\|f\|_\infty$ et $\|f'\|_\infty$ sont des réels positifs. Donc N et N' sont à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
Si $N(f)=0$, alors $f'=0$ et $f(0)=0$. Donc f est constante égale à 0 sur l'intervalle $[0,1]$. Donc N est bien définie. On montre facilement que N' est bien définie également.
On a montré en cours que $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda|\|f\|_\infty$. Donc N et N' sont positivement homogènes.
Enfin, $N(f+g) = |(f+g)(0)| + \|f'+g'\|_\infty \leqslant |f(0)| + |g(0)| + \|f'\|_\infty + \|g'\|_\infty = N(f)+N(g)$.
De même, $N'(f+g) = N'(f)+N'(g)$.

2. Déjà, $N(f) \leqslant N'(f)$.
De plus, si $x \in [0,1]$, alors $f(x) = f(0) + \displaystyle\int_0^x f'$.
Donc $|f(x)| \leqslant |f(0)| + \displaystyle\int_0^x |f'| \leqslant |f(0)| + \int_0^x \|f'\|_\infty dt \leqslant |f(0)| + \|f'\| = N(f)$.
Ainsi, $\|f\|_\infty \leqslant N(f)$ et $N'(f) \leqslant 2N(f)$.

3. En posant $f_n(x) = x^n$. Alors $N(f_n) = n$ tandis que $\|f_n\|_\infty = 1$. Donc N et $\|.\|_\infty$ ne sont pas équivalentes. Comme N et N' sont équivalentes, N' et $\|.\|_\infty$ ne peuvent pas être équivalentes par transitivité de l'équivalence des normes.

Corrigé 3

1.
- si une suite $(u_{\phi(n)})$ est une suite extraite de la suite (u_{2n}), pour tout n, $\phi(n)$ doit être un nombre pair. Donc (u_{3n}) n'est pas une suite extraite de (u_{2n}). En revanche, (u_{6n}) en est une, tout comme $(u_{3.2^{n+1}})$ et $(u_{2^{n+1}})$.
  Par contre (u_{2^n}) n'en est pas une car $u_{2^0} = u_1$ n'est pas un terme d'indice pair. De même pour $(u_{3\cdot 2^n})$.
- par des raisonnements similaires, les suites extraites de (u_{3n}) sont (u_{6n}), $(u_{3\cdot 2^n})$ et $(u_{3\cdot 2^{n+1}})$.
- La seule suite extraite de (u_{6n}) est $(u_{3.2^{n+1}})$.
- La seule suite extraite de $(u_{3\cdot 2^n})$ est $(u_{3.2^{n+1}})$.
- La seule suite extraite de (u_{2^n}) est $(u_{2^{n+1}})$
- Aucune suite n'est extraite de $(u_{3.2^{n+1}})$ ni de $(u_{2^{n+1}})$

2. Posons $v_n = u_{\phi(n)}$. Si ψ est une extraction, alors $v_{\psi(n)} = u_{\phi\circ\psi(n)}$ (attention à l'ordre de composition des extractions !)
Or $\phi\circ\psi$ est strictement croissante par composition de fonctions strictement croissantes et est à valeurs entières. La suite $(v_{\psi(n)})$ est donc bien une suite extraite de (u_n).

Corrigé 4

1. On va prouver que (u_n) est convergente en prouvant qu'elle est majorée. Soit M un réel et ϕ une extraction telle que $(u_{\phi(n)})$ est majorée par M. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $u_n \leqslant u_{\phi(n)} \leqslant M$. Donc u est majorée, croissante donc convergente.

2. Puisqu'une suite extraite convergente est majorée, on peut utiliser la question précédente et conclure.

3. Il suffit de construire par récurrence sur n une suite de valeurs $\phi(n)$ telle que $\phi(n+1) > \phi(n)$ et $u_{\phi(n)} \geqslant n$.
Initialisation : (u_n) n'est pas majorée par 0. Donc il existe $p_0 = \phi(0)$ tel que $u_{p_0} \geqslant 0$.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $\phi(n) = p_n$ soit construit.
Si (par l'absurde) $\forall p > p_n$, $u_p \leqslant n+1$, alors (u_n) serait majorée par $\max\{u_0, \dots, u_{p_n}\} \cup \{n+1\}$. Donc il existe $p_{n+1} > \phi(n)$ tel que $u_{p_{n+1}} > n+1$. Il suffit de poser $p_{n+1} = \phi(n+1)$.
La suite extraite $(u_{\phi(n)})$ vérifie donc par construction $u_{\phi(n)} \geqslant n$. Par théorème des gendarmes, cette suite extraite diverge vers $+\infty$.