Banque exos 5/2

Exercice 1 ⋆⋆⋆ : Polynômes annulateurs de A et propriétés de A : *(1)*

Soit $n \geqslant 1$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. *Démontrer que si ω est une valeur propre de A de multiplicité s, alors $\bar{\omega}$ est une valeur propre de A de multiplicité s.*
2. *On suppose que $A^3 - 3A - 4I_n = 0$. Montrer que A est de déterminant strictement positif.*
3. *On suppose que $A^2 + A + I_n = 0$. Montrer que n est pair.*
4. *On suppose que $A^3 + A^2 + A = 0$. Montrer que le rang de A est pair.*
5. *On suppose que $A^3 + A^2 + A = 0$. Démontrer que $Tr(A) \in \mathbb{Z}^-$.*

Exercice 2 ⋆⋆⋆ - Endomorphisme sur un espace vectoriel réel *(2)*

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{R}-$espace vectoriel E de dimension finie. Montrer qu'il existe toujours une droite ou un plan de E stable par f.

Exercice 3 ⋆⋆ - Calcul du polynôme minimal *(3)*

Déterminer le polynôme minimal des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 ⋆⋆⋆ - Inversibilité d'un polynôme en u *(4)*

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie, et soit μ_u son polynôme minimal. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Démontrer que $P(u)$ est inversible si et seulement si P et μ_u sont premiers entre eux.

Indications 1

1. Se lit sur le polynôme caractéristique.
2. Exprimer le déterminant en fonction des valeurs propres.
3. A n'admet pas de valeurs propres réelles.
4. Utiliser la question précédente.
5. Exprimer la trace en fonction des valeurs propres.

Indications 2 Utiliser le théorème de Cayley-Hamilton, et séparer le cas où le polynôme caractéristique ne contient que des facteurs de degré 2.

Indications 3 On peut calculer les puissances de A et trouver une relation entre elles de degré le plus petit possible, ou bien chercher le polynôme minimal parmi les diviseurs du polynôme caractéristique,

Indications 4 Quel théorème applique-t-on souvent quand on a deux polynômes premiers entre eux ? Pour l'autre sens, partir de P un polynôme non premier avec μ_u et construire un polynôme R avec $\deg(R) \leqslant \deg(\mu_u)$ tel que $P(u)R(u) = 0$.

Corrigé exercice 1

1. Si $\chi_A(X) = (X - \omega)^s Q(X)$ avec $Q(\omega) \neq 0$, alors puisque χ_A est un polynôme réel, en passant au conjugué,

$$\chi_A(X) = \overline{\chi_A}(X) = (X - \bar{\omega})^s \bar{Q}(X)$$

avec $\bar{Q}(\bar{\omega}) = \overline{Q(\omega)} \neq 0$. Ainsi, $\bar{\omega}$ est racine de χ_A de multiplicité s.

2. Une simple étude de $P(X) = X^3 - 3X - 4$ montre que $P(X) = (X - \alpha)(X - \omega)(X - \bar{\omega})$, où $\alpha \geqslant 0$ et $\omega \in \mathbb{C}$. Ainsi, A annule un polynôme scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$. Donc $Sp_{\mathbb{C}}(A) \subset \{\alpha, \omega, \bar{\omega}\}$. Le déterminant de A étant égal au produit des valeurs propres, il vaut ici $\det(A) = \alpha^r \omega^s (\bar{\omega})^t$. D'après la question précédente, $s = t$ et $\det(A) = \alpha^r |\omega|^{2s} \geqslant 0$.

3. Les racines du polynôme $X^2+X+1=0$ sont $\lambda_1 = j = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ et $\lambda_2 = \bar{j} = j^2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Ainsi, les valeurs propres de A sur $\mathbb{C}$, qui sont parmi les racines de tout polynôme annulateur, sont parmi λ_1 et λ_2. Donc A n'admet pas de valeurs propres réelles. Son polynôme caractéristique, qui est de degré n, n'admet pas de racines sur $\mathbb{R}$. Ceci n'est possible que si n est pair (tout polynôme de degré impair s'annule d'après le théorème des valeurs intermédiaires et l'étude des limites en $\pm\infty$).
4. Considérons f l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est A. On a $f^3+f^2+f=0$. $\mathrm{Im}(f)$ est stable par f, on peut considérer g la restriction de f à $\mathrm{Im}(f)$ qui est un endomorphisme de $\mathrm{Im}(f)$. Alors, pour tout $y \in \mathrm{Im}(f)$, on a $y = f(x)$, d'où
$$g^2(y)+g(y)+y = f^3(x)+f^2(x)+f(x) = 0.$$
Ainsi, $g^2+g+Id=0$. La question précédente nous dit que $\mathrm{Im}(f)$, l'espace sur lequel g agit, est de dimension paire.
5. On procède comme à la deuxième question. On factorise $X^3+X^2+X = X(X-j)(X-j^2)$. A admet un polynôme scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, donc ses valeurs propres sont dans 0, j et j^2. Notons r, s, t leurs multiplicités respectives. Comme à la première question, on doit avoir $t = s$. Maintenant,
$$\mathrm{Tr}(A) = r0 + s(j+j^2) = -s \in \mathbb{Z}^-.$$

Corrigé exercice 2

On note χ_f le polynôme caractéristique de f, que l'on factorise en produit d'irréductibles sur $\mathbb{R}$:
$$\chi_f(X) = \prod_{i=1}^{l}(X-\alpha_i)^{n_i}\prod_{j=1}^{m}(X^2+a_jX+b_j)^{q_j}.$$
Si cette factorisation possède un facteur de degré 1, l'endomorphisme possède un vecteur propre u, et la droite vectorielle $\mathrm{vect}(u)$ convient. Sinon, d'après le théorème de Cayley-Hamilton :
$$(f^2+a_1f+b_1Id)^{q_1}\circ\cdots\circ(f^2+a_mf+b_mId)^{q_m} = 0.$$
La composée d'applications bijectives étant bijective, une des applications que l'on compose au moins n'est pas bijective. On en déduit par exemple que $f^2+a_1f+b_1Id$ n'est pas une bijection. Soit u dans le noyau de cette application. Alors $\mathrm{vect}(u, f(u))$ est un plan stable, car $f^2(u) = -a_1f(u)-b_1u$. *Remarque : un endomorphisme sur un $\mathbb{R}-$espace vectoriel n'admet pas forcément une valeur propre, comme le prouve l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice :*
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Corrigé exercice 3

On va utiliser plusieurs méthodes. Pour A, on remarque que son polynôme caractéristique est $(X-1)^2$. Son polynôme minimal ne peut être que $(X-1)$ ou $(X-1)^2$. Ce ne peut pas être $X-1$ car si A serait égale à I_2 donc son polynôme minimal est $(X-1)^2$.
Pour B, on remarque que $B^2 = 3B$ et donc $B^2-3B=0$. Comme $B-3I \neq 0$ et $B \neq 0$, on en déduit que son polynôme minimal est X^2-3X.
Pour C, on commence par calculer le polynôme caractéristique de C. Après calculs, on trouve qu'il est égal à
$$\chi_C(X) = (X-1)(X+1)^2.$$
Son polynôme minimal divise le polynôme caractéristique $(X-1)(X+1)^2$ tout en ayant les mêmes racines. Cela ne peut être que $(X-1)(X+1)$ ou $(X-1)(X+1)^2$. On vérifie que $(X-1)(X+1)$ est un polynôme annulateur pour C, donc son polynôme minimal.
Pour D, le polynôme caractéristique de D est
$$\chi_D = (X+1)^3.$$
La seule valeur propre de D est donc -1. Comme D n'est pas égale à $-I_3$, son polynôme minimal ne peut être que $(X+1)^3$ ou $(X+1)^2$. On vérifie que $(D+I_3)^2 = 0$ qui est donc le polynôme minimal de D.

Corrigé exercice 4

Supposons d'abord que P et μ_u sont premiers entre eux. Alors, d'après le théorème de Bézout, il existe $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $UP+V\mu_u = 1$. Alors :
$U(u)\circ P(u) + V(u)\circ\mu_u(u) = Id_E$ donc $U(u)\circ P(u) = I_n$.
$P(u)$ est donc inversible, d'inverse $U(u)$.
Réciproquement et par contraposée, supposons que P et μ_u ne sont pas premiers entre eux, et soit Q un facteur commun. On factorise μ_u en $\mu_u = QR$ avec $\deg(Q), \deg(R) \leqslant \deg(\mu_u)$. En particulier, on a $R(u) \neq 0$. Mais d'autre part, $\mu_u | PR$ et donc $0 = P(u)R(u)$. Comme $R(u)$ est non nul, $P(u)$ est un diviseur de zéro, donc ne peut pas être un endormorphisme inversible.