Banque exos 5/2

Exercice 1 ⋆⋆ - Endomorphisme nilpotent *(1)*

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel qu'il existe $n \geqslant 1$ vérifiant $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$. Démontrer qu'il existe $x \in E$ tel que la famille $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ soit libre.

Indications Considérer un x tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$.

Exercice 2 ⋆⋆⋆ - Avec des suites *(2)*

Soit E l'espace vectoriel des suites réelles,

$$F = \{(u_n) \in E;\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} = 0\}$$

$$G = \{(u_n) \in E;\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} = u_{2n+1}\}.$$

Démontrer que F et G sont supplémentaires.

Exercice 3 ⋆⋆⋆ - Transformer une somme en somme directe *(3)*

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E tels que $F + G = E$.
Soit F' un supplémentaire de $F \cap G$ dans F. Montrer que $F' \oplus G = E$.

Exercice 4 ⋆⋆⋆ - Une caractérisation des homothéties *(4)*

Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que, pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.

1. *Démontrer que pour tout $x \in E$, $x \neq 0$, il existe un unique scalaire λ_x tel que $f(x) = \lambda_x x$.*
2. *Comparer λ_x et λ_y lorsque (x, y) est liée.*
3. *Comparer λ_x et λ_y lorsque (x, y) est libre.*
4. *En déduire que f est une homothétie.*

Indications On pourra calculer $f(\mu x)$ et $f(x + y)$ de deux façons différentes.
Corrige 1 Puisque $f^{n-1} \neq 0$, il existe $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$. On va prouver que la famille $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est libre. Pour cela, si on a

$$\lambda_0 x + \lambda_1 f(x) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(x),$$

on applique f^{n-1} à cette égalité. Puisque $f^k(x) = 0$ si $k \geqslant n$, on obtient

$$\lambda_0 f^{n-1}(x) = 0 \implies \lambda_0 = 0$$

puisque $f^{n-1}(x) \neq 0$. On continue en composant par f^{n-2}, puis par f^{n-3},etc... pour trouver successivement que λ_1, λ_2 jusque λ_{n-1} sont nuls.
Corrige 2 D'abord, il est clair que $F \cap G = \{0\}$. En effet, si la suite (u_n) est dans l'intersection de F et G, alors tous ses termes d'indice pair sont nul, et par suite tous ceux d'indice impair sont également nuls car $F = G$.
Prouvons maintenant que $F + G = E$. Pour cela, prenons une suite (u_n) de E. Par analyse, si $u_n = v_n + w_n$ avec $(v_n) \in F$ et $(w_n) \in G$, alors on a forcément $u_{2n} = w_{2n}$ ce qui définit forcément (w_n) puisque $w_{2n+1} = w_{2n}$. La suite (v_n) ne peut être que la différence entre u_n et w_n, en espérant qu'elle soit dans F.
Synthèse : on pose (w_n) par $w_{2n} = w_{2n+1} = u_{2n}$ pour tout entier naturel n. Il est clair que (w_n) est élément de G. Posons ensuite, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - w_n$. Alors par définition on a $(u_n) = (v_n) + (w_n)$ et il reste à prouver que $(v_n) \in F$. Ce qui est vrai car $v_{2n} = u_{2n} - w_{2n} = 0$.
Ainsi, on a bien prouvé que $E = F \oplus G$.
Corrige 3 Prouvons d'abord que F' et G sont en somme directe, c'est-à-dire que $F' \cap G = \{0\}$. Prenons $x \in G \cap F'$. Alors, puisque $F \cap G$ et F' sont en somme directe, et que $x \in F \cap G$ (x est dans G et dans $F' \subset F$), on en déduit $x = 0$. D'autre part, il faut montrer que $F' + G = E$. Soit $z \in E$. On sait que $z = f + g$, avec $f \in F$ et $g \in G$ (car $F + G = E$). D'autre part, on peut décomposer f en $g' + f'$, avec $g' \in F \cap G$ et $f' \in F'$. Ainsi, on obtient

$$z = g' + f' + g = f' + (g + g')$$

avec $f' \in F'$ et $g + g' \in G$: $F' + G = E$ ce qui achève la preuve que F' et G sont supplémentaires.
Corrige 4

1. Puisque la famille $(x, f(x))$ est liée, il existe $(a, b) \neq (0, 0)$ tel que $ax + bf(x) = 0$. Puisque $x \neq 0$, on ne peut pas avoir $b = 0$ et donc $f(x) = \frac{-a}{b}x$.

2. Écrivons $y = \mu x$. Alors
$$\mu\lambda_y x = \lambda_y y = f(y) = f(\mu x) = \mu f(x) = \mu\lambda_x x$$
et on peut simplifier par $\mu x \neq 0$ pour prouver que $\lambda_x = \lambda_y$.

3. Calculons $f(x + y)$ de deux façons différentes. D'une part,
$$f(x + y) = \lambda_{x+y}(x + y) = \lambda_{x+y}x + \lambda_{x+y}y,$$
d'autre part,
$$f(x + y) = f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y.$$
Puisque la famille (x, y) est libre, toute décomposition d'un vecteur à l'aide de combinaison linéaire de ces vecteurs est unique. On obtient donc $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_{x+y}$

4. D'après les questions précédentes, tous les λ_x sont égaux, et donc il existe un scalaire λ tel que, pour tout $x \in E$, $f(x) = \lambda x$. f est bien une homothétie.