Banque exos 5/2

Exercice 1 ⋆⋆ *(1)*

1. $C(G) = \{x \in G;\ \forall y \in G, xy = yx\}$ *($C(G)$ s'appelle le centre de G)* ;
2. $aHa^{-1} = \{aha^{-1};\ h \in H\}$ *où $a \in G$ et H est un sous-groupe de G.*
3. *On suppose de plus que G est abélien. On dit que x est un élément de torsion de G s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n = e$. Démontrer que l'ensemble des éléments de torsion de G est un sous-groupe de G.*

Exercice 2 ⋆⋆⋆ **- Inversibles à coefficients dans $\mathbb{Z}$.** *(2)*

On note $GL_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, à coefficients dans $\mathbb{Z}$, qui sont inversibles et dont l'inverse est à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

1. *Démontrer que si M est à coefficients dans $\mathbb{Z}$, alors $M \in GL_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si* $\det(M) = \pm 1$.
2. *En déduire que $GL_n(\mathbb{Z})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.*

Exercice 3 ⋆⋆ **- Union de deux sous-groupes** *(3)*

Soit G un groupe et H, K deux sous-groupes de G. Démontrer que $H \cup K$ est un sous-groupe de G si et seulement si $H \subset K$ ou $K \subset H$.

Exercice 4 ⋆⋆⋆⋆ **- Théorème de Lagrange** *(4)*

Soit $(G, \cdot)$ un groupe fini et H un sous-groupe de G.

1. *Montrer que pour tout $a \in G$, H et $aH = \{ah;\ h \in H\}$ ont le même nombre d'éléments.*
2. *Soient $a, b \in G$. Démontrer que $aH = bH$ ou $aH \cap bH = \varnothing$.*
3. *En déduire que le cardinal de H divise le cardinal de G.*

Exercice 5 ⋆⋆⋆ **- Automorphisme intérieur** *(5)*

Soit $(G, \cdot)$ un groupe. Pour $a \in G$, on note $\tau_a : G \to G$ défini par $\tau_a(x) = axa^{-1}$.

1. *Démontrer que τ_a est un endomorphisme de G.*
2. *Vérifier que, pour tous $a, b \in G$, $\tau_a \circ \tau_b = \tau_{ab}$.*
3. *Montrer que τ_a est bijective et déterminer son inverse.*
4. *En déduire que $\Theta = \{\tau_a;\ a \in G\}$ muni du produit de composition est un groupe.*

Exercice 6 ⋆⋆ **- Groupe admettant un nombre fini de sous-groupes** *(6)*

Soit G un groupe admettant un nombre fini de sous-groupes.

1. *Démontrer que tout élément de G est d'ordre fini.*
2. *En déduire que G est fini.*

Indications Exercice 4

1. Construire une bijection.
2.
3. Réaliser une partition de G.

Indications Exercice 5

1. Vérifier la définition.
2.
3. Utiliser la question précédente avec $b = a^{-1}$.
4. Démontrer qu'il s'agit d'un sous-groupe de $(S_G, \circ)$.

Indications Exercice 6

1. Si un élément n'est pas d'ordre fini, le sous-groupe engendré par cet élément est isomorphe à $(\mathbb{Z}, +)$.
2. Remarquer que G est la réunion des sous-groupes engendrés par ses éléments.

Corrigé Exercice 1
Il suffit, pour chaque cas, d'appliquer le théorème de caractérisation des sous-groupes.

1. e est élément de $C(G)$ car $ey = ye = y$ pour tout $y \in G$. Soient $x_1, x_2 \in C(G)$. Alors, pour tout $y \in G$, on a

$$x_1 x_2 y = x_1(x_2 y) = (x_1 y)x_2 = y x_1 x_2$$

et donc $x_1 x_2 \in C(G)$. Enfin, si $x \in C(G)$, alors pour tout $y \in G$,

$$xy = yx \implies xyx^{-1} = yxx^{-1} = y \implies x^{-1}xyx^{-1} = x^{-1}y \implies yx^{-1} = x^{-1}y$$

où on a multiplié à droite puis à gauche par x^{-1}. On en déduit que $x^{-1} \in C(G)$ qui est donc un sous-groupe de G.

2. Puisque H est un sous-groupe de G, $e \in H$ et donc $aea^{-1} \in G$. Mais $aea^{-1} = e$ et donc $e \in aHa^{-1}$. Soient $x = aha^{-1}$ et $y = ah'a^{-1}$ deux éléments de aHa^{-1} avec donc $h, h' \in H$. On a

$$xy = aha^{-1}ah'a^{-1} = ahh'a^{-1} \in aHa^{-1}$$

puisque $hh' \in H$ (H est un sous-groupe de G). Enfin, on a

$$x^{-1} = (aha^{-1})^{-1} = ah^{-1}a^{-1} \in aHa^{-1}$$

puisque $h^{-1} \in H$. aHa^{-1} est donc bien un sous-groupe de G.

3. Notons T l'ensemble des éléments de torsion de G. On a $e^1 = e$, donc $e \in T$. De plus, si $x, y \in T$, avec respectivement $x^n = e$ et $y^m = e$, il suffit de remarquer que

$$(y^{-1})^m = (y^m)^{-1} = e^{-1} = e$$

puis d'utiliser le fait que x et y^{-1} commutent pour prouver que

$$(xy^{-1})^{nm} = (x^n)^m((y^{-1})^m)^n = e.$$

Ainsi, xy^{-1} est élément de T, et T est bien un sous-groupe de G.

Corrigé Exercice 2

1. Prenons d'abord $M \in GL_n(\mathbb{Z})$. Alors on a

$$\det(M) \times \det(M^{-1}) = \det(MM^{-1}) = \det(I_n) = 1$$

et de plus $\det(M)$ et $\det(M^{-1})$ sont des éléments de $\mathbb{Z}$. Ceci n'est possible que si $\det(M)$ et $\det(M^{-1})$ sont égaux à 1 ou -1. Réciproquement, si $\det(M) = \pm 1$, alors l'inverse de M s'exprime sous la forme :

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M}(\text{comat } M)^T.$$

La comatrice d'une matrice à coefficients dans $\mathbb{Z}$ étant à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et $\det(M)$ valant ± 1, on a bien que M^{-1} est une matrice à coefficients entiers.

2. On remarque d'abord que $I_n \in GL_n(\mathbb{Z})$. Ensuite, si $A, B \in GL_n(\mathbb{Z})$, des formules

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

et

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

on déduit facilement que $\det(A^{-1})$ et $\det(AB)$ sont éléments de $\{-1, 1\}$ et donc A^{-1}, AB sont éléments de $GL_n(\mathbb{Z})$.

Corrigé Exercice 3
Si $H \subset K$, alors $H \cup K = K$ qui est un sous-groupe de G. De même, si $K \subset H$, $H \cup K = H$ qui est un sous-groupe de G.
Supposons maintenant que $H \cup K$ est un sous-groupe de G et que ni $H \subset K$, ni $K \subset H$. Alors on peut trouver $x \in H \backslash K$ et $y \in K \backslash H$. Puisque $H \cup K$ est un groupe et que $x, y \in H \cup K$, on a $xy \in H \cup K$. Mais si $xy \in H$, alors $y = x^{-1}(xy)$ est le produit de deux éléments de H, qui est un sous-groupe de G, et donc $y \in H$ ce qui est une contradiction. On obtient de même une contradiction dans l'autre cas possible $xy \in K$. L'hypothèse de départ est donc fausse, et on a bien $H \subset K$ ou $K \subset H$.

Corrigé Exercice 4

1. Soit $f : H \to aH$ définie par $f(h) = ah$. Il s'agit clairement d'une surjection de H sur aH. De plus, si $ah_1 = ah_2$, alors $h_1 = h_2$ car a est inversible, et donc f est aussi injective. f est donc une bijection de H sur aH ; ces deux ensembles ont le même nombre d'éléments.
2. Supposons que $aH \cap bH \neq \varnothing$ et prouvons que $aH = bH$. Par symétrie, il suffit de prouver que $aH \subset bH$. Soit $x \in aH \cap bH$, $x = ah_1 = bh_2$. Prenons $y = ah \in aH$. Alors $a = bh_2h_1^{-1}$ et donc $y = bh_2h_1^{-1}h \in bH$.
3. La réunion des ensembles aH est clairement égale à G (si $x \in G$, il est dans xH). On ne garde que les aH deux à deux disjoints et par les deux questions précédentes, on réalise ainsi une partition de G avec des ensembles qui ont tous le même cardinal, à savoir le cardinal de H. Si k est le nombre d'ensembles nécessaires pour réaliser cette partition, on a
$$k\,\mathrm{Card}(H) = \mathrm{Card}(G)$$
et donc le cardinal de H divise celui de G.

Corrigé Exercice 5

1. Il suffit d'appliquer la définition : pour tous $x, y \in G$, on a
$$\tau_a(xy) = axya^{-1} = axa^{-1}aya^{-1} = \tau_a(x)\tau_a(y).$$
2. Soit $x \in G$. On a
$$\tau_a \circ \tau_b(x) = \tau_a(bxb^{-1}) = abxb^{-1}a^{-1}$$
tandis que
$$\tau_{ab}(x) = abx(ab)^{-1} = abxb^{-1}a^{-1}.$$
On a donc $\tau_a \circ \tau_b = \tau_{ab}$.
3. Soit $a \in G$. On pourrait prouver que τ_a est injectif en calculant son noyau, puisqu'il est surjectif, mais c'est plus facile d'appliquer la question précédente. Avec $b = a^{-1}$, elle donne
$$\tau_a \circ \tau_{a^{-1}} = \tau_{aa^{-1}} = \tau_e = Id_G$$
et en inversant le rôle joué par a et b, on a aussi
$$\tau_{a^{-1}} \circ \tau_a = Id_G.$$
Ainsi, τ_a est inversible d'inverse $\tau_{a^{-1}}$.
4. On va prouver que $\Theta = \{\tau_a;\ a \in G\}$ est un sous-groupe de $(S_G, \circ)$. Il est non-vide parce qu'il contient τ_e. Si $\tau_a, \tau_b \in \Theta$, alors
$$(\tau_a)^{-1} = \tau_{a^{-1}} \in \Theta$$
et
$$\tau_a \circ \tau_b = \tau_{ab} \in \Theta.$$
Ainsi, $(\Theta, \circ)$ est bien un sous-groupe de $(S_G, \circ)$.

Corrigé Exercice 6

1. Supposons que G admette un élément x d'ordre infini et notons H le sous-groupe engendré par x. Alors H est isomorphe à $(\mathbb{Z}, +)$, qui contient une infinité de sous-groupes. On en déduit que H, et donc G, contiennent aussi une infinité de sous-groupes (les sous-groupes engendrés par les x^n, $n \geqslant 1$, qui ne sont pas deux à deux égaux).
2. Pour $x \in G$, notons H_x le sous-groupe engendré par x. Alors on a $G = \bigcup_{x \in G} H_x$. Mais puisque G contient seulement un nombre fini de sous-groupes, il y a un nombre fini de H_x différents, notons-les $H_{x_1}, \dots, H_{x_p}$, d'où $G = \bigcup_{i=1}^p H_{x_i}$. Mais chacun des H_{x_i} est fini d'après la question précédente. Donc G est fini.