Séries

Le but de ce chapitre est de consolider les acquis de première année relatifs aux séries numériques et d'étendre la notion de série convergente au cadre des espaces vectoriels de dimension finie.
Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou le corps des complexes et E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie. L'espace vectoriel E est muni d'une norme qu'on notera $\|.\|$.

I — Séries

1) Vocabulaire et notations

Définitions et notations *(1)*

Soit (u_n) une suite à valeurs dans E : soit la suite de ses sommes partielles (S_n) définie par $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

(1) : *On appelle* **série vectorielle** *de terme général u_n le couple $((u_n),(S_n))$ que l'on note aussi $\sum u_n$.*
(2) : *On dit que la série vectorielle $\sum u_n$* **est convergente** *lorsque la suite (S_n) admet une limite finie dans E. Sinon, la série est dite* **divergente**.
(3) : *Lorsque c'est le cas, le vecteur $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ est appelé* ***somme de la série*** *et est noté $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.*
(4) : **Étudier la nature** *d'une série vectorielle consiste à préciser si la série converge ou diverge.*
Remarque : *ces définitions s'adaptent lorsque la suite (u_n) n'est définie qu'à partir d'un certain rang n_0.*

Exercice 1 : Typage des différents objets

(1) : *Compléter : $u_n \in \ldots$ et $(u_n) \in \ldots$, $\sum u_n \in \ldots$ et $\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k \in \ldots$.*
(2) : *Pourquoi peut-on toujours parler de $\sum u_n$? Qu'en est-il de $\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k$?*

Exemples *(2)*

(1) : *Séries numériques géométriques dans $\mathbb{C}$, séries vectorielles géométriques dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ou dans $\mathcal{L}(E)$.*
(2) : *Série numérique harmonique, série numérique harmonique alternée.*
(3) : *Séries numériques ou vectorielles télescopiques :* ***exemple :*** $\sum \frac{1}{n(n-1)}$.

Propriétés des séries numériques ou vectorielles *(3)*

(1) : **Lien entre (u_n) et $\sum u_n$:** $\forall n \geqslant 1, u_{n+1} = S_{n+1} - S_n = \left(\sum_{k=0}^{n} u_{k+1} - u_k\right) + u_0$.
- *Ainsi, la suite (u_n) et la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ ont même nature.*

(2) : *Le terme général d'une série convergente tend vers 0_E (condition nécessaire mais pas suffisante).*
(3) : *Lorsque (u_n) ne converge pas vers 0_E, on dit que $\sum u_n$ diverge grossièrement.*
(4) : *On ne modifie pas la nature d'une série en modifiant un nombre fini de termes.*
(5) : *Soit $\sum u_n$ une série convergente de somme L. On définit son reste d'ordre n par $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = L - S_n$.*
- *Alors la suite (R_n) tend vers 0.*

(6) : *L'ensemble $\mathcal{C}$ des séries convergentes à valeurs dans E est un e.v.*
(7) : *L'application $S : \sum u_n \in \mathcal{C} \mapsto \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k \in E$ est une application linéaire.*
Si $E = \mathbb{K}$, S est une forme linéaire.
(8) : *Si E est de dimension finie, une série vectorielle est convergente si et seulement si les séries scalaires des coordonnées sont convergentes. La somme se calcule coordonnée par coordonnée dans une base de E.*

2) Critères de convergence

Condition nécessaire *(4)*

(1) : *Si la série* $\sum u_n$ *est convergente, alors* (u_n) *converge vers 0.*
La réciproque est fausse.
(2) : *Lorsque* (u_n) *ne converge pas vers 0, on dit que la série* $\sum u_n$ *est grossièrement divergente.*

Théorème (condition suffisante) : une série vectorielle absolument convergente est convergente *(5)*

Si $\sum \|u_n\|$ *est convergente alors* $\sum u_n$ *l'est aussi et on a* $\|\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \|u_k\|$.

Exercice 2 : Exemple de série matricielle

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *muni d'une norme d'algèbre* $\|.\|$*, c'est à dire que pour* A *et* B *dans* E*,* $\|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|$.
Soit alors A *telle que* $\|A\| < 1$.
(1) : *Montrer que* $\sum A^n$ *est une série convergente et déterminer sa limite.*
(2) : *Montrer que pour tout* $A \in E$*, la série* $\sum \frac{1}{n!} A^n$ *est convergente.*

Théorème de comparaison des séries numériques à termes positifs *(6)*

Principe général : une série à termes réels positifs (éventuellement à partir d'un certain rang) converge si et seulement la suite des sommes partielles est majorée. Dans ce cas, la somme de la série est la borne supérieure des sommes partielles.
Lorsqu'une série à termes réels positifs est divergente, on convient que sa somme est égale à $+\infty$.
(1) : *Si* $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ *pour tout* n*, alors* $0 \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$ *(dans* $[0, +\infty]$*).*
En particulier, si $\sum u_n$ *diverge,* $\sum v_n$ *diverge aussi et si* $\sum v_n$ *converge, alors* $\sum u_n$ *converge aussi.*
(2) : *Si* (u_n) *et* (v_n) *sont des suites à termes positifs telles que* $u_n = O(v_n)$ *et* $\sum v_n$ *converge, alors* $\sum u_n$ *converge.*
(3) : *Si* (u_n) *et* (v_n) *sont des suites à termes positifs telles que* $u_n = o(v_n)$ *et* $\sum v_n$ *converge, alors* $\sum u_n$ *converge.*
(4) : *Si* (u_n) *et* (v_n) *sont des suites à termes positifs telles que* $u_n \sim v_n$ *alors* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *ont même nature.*

Théorème de comparaison des séries vectorielles *(7)*

Pour montrer qu'une série vectorielle $\sum u_n$ *est convergente, il suffit d'utiliser un théorème de comparaison des séries numériques à la série* $\sum ||u_n||$.

Exercice 3 : Exemple

(1) : *Retrouver que la série* $\sum \frac{1}{n^2}$ *est convergente en la comparant à une série télescopique convergente.*
On veut montrer que la suite de terme général $u_n = \dfrac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}}$ *converge vers un réel non nul.*
(2) : *Étudier la série* $\sum (\ln u_n - \ln u_{n-1})$ *en faisant un* DL_2 *de son terme général puis en utilisant un théorème de comparaison.*

Exercice 4 : Contre-exemple en cas de signe variable :

Étudier les natures des séries $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ *et* $\sum (\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n})$.

Théorème : critère spécial des séries numériques alternées *(8)*

Soit (u_n) *une suite réelle positive décroissante de limite nulle.*
(1) : *La série* $\sum (-1)^n u_n$ *est convergente.*
(2) : *Deux sommes partielles successives encadrent la somme complète.*
(3) : *Soit* $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k$*. Alors* R_n *est du signe de* $(-1)^{n+1}$ *et* $|R_n| \leqslant u_{n+1}$.
(4) : *Le signe de la somme de la série est celui du premier terme de la série.*
(5) : *Illustrer le résultat par un dessin.*

Exercice 5 : Applications

Montrer que

(1) : *Pour tout* $\alpha > 0$, *la série* $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}$ $(n \geqslant 1)$ *est convergente.*

On note $\eta(\alpha) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}$ *(fonction êta de* Dirichlet*).*

(2) : $\ln 2 = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n(n+1)}$

Exercice 6 : Contre exemple ?

Exhiber une série alternée $\sum(-1)^n u_n$ *divergente telle que* (u_n) *tend vers 0.*

Théorème : comparaison d'une série et d'une intégrale : *(9)*

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ **continue par morceaux, positive, et décroissante**.

On pose $F(x) = \displaystyle\int_{[0,x]} f$ *et* $\displaystyle\int_{[0,+\infty[} f = \lim_{x\to+\infty} F(x) \in [0,+\infty]$.

(1) : *La série de terme général* $f(n) - \displaystyle\int_{[n,n+1]} f$ *est convergente et sa somme est majorée par* $f(0)$.

(2) : $\sum f(n)$ *converge* $\Longleftrightarrow F$ *est majorée* $\Longleftrightarrow \displaystyle\int_{[0,+\infty[} f$ *est une valeur finie.*

(3) : *On a les inégalités suivantes dans* $[0,+\infty]$ *:*

$$\int_{[0,+\infty[} f \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} f(n) \leqslant f(0) + \int_{[0,+\infty[} f \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N},\ \int_{[n+1,+\infty[} f \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leqslant \int_{[n,+\infty[} f.$$

Applications *(10)*

(1) : *Convergence des séries de* Riemann *: la série* $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ *est convergente* $\Leftrightarrow \alpha > 1$

(on pose alors $\zeta(\alpha) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$*).*

(2) : *Convergence des séries de* Bertrand *: la série* $\sum \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ *est convergente* $\Leftrightarrow \alpha > 1$ *ou bien* $\alpha = 1$ *et* $\beta > 1$.

Exercice 7 : Comparaison à une série de Riemann :

(1) : *Étudier la nature des séries* $\sum(\tan(1/n) - 1/n)$, $\sum \exp(-n)$, $\sum \frac{1}{n\sqrt[6]{n}}$, $\sum \frac{(\ln n)^\beta}{n^{3/2}}$, $\sum \exp(-\sqrt{n})$, $\sum n^{10}\exp(-\sqrt{n})$, $\sum \frac{(\ln n)^5}{n^2}$, $\sum \frac{1}{n^{1/2}(\ln n)^5}$.

Théorème : Règle de d'Alembert pour les séries numériques strictement positives : *(11)*

Soit (u_n) *une suite à termes réels strictement positifs telle que le rapport* u_{n+1}/u_n *admet une limite* $\ell \in [0,+\infty]$.
Si $\ell < 1$ *: pour tout* $\alpha \in]\ell, 1[$, $u_n = o(\alpha^n)$ *et* $\sum u_n$ *converge.*
Si $\ell > 1$ *: pour tout* $\alpha \in]1, \ell[$, $\alpha^n = o(u_n)$ *et* $\sum u_n$ *diverge grossièrement.*
Si $\ell = 1$, *on ne peut rien dire de général.*

Exercice 8 : Applications :

Montrer que :

(1) : *la série* $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ *est absolument convergente pour tout* $x \in \mathbb{C}$.

(2) : *pour* $z \in \mathbb{C}$ *et* $p \in \mathbb{N}$, *la série de terme général* $n^p z^n$ *est absolument convergente si* $|z| < 1$ *et grossièrement divergente si* $|z| \geqslant 1$.

(3) : *si* $M \in \mathcal{M}_q(\mathbb{C})$ *et* $p \in \mathbb{N}$, *la série de terme général* $n^p M^n$ *est absolument convergente si* $Sp(M) \subset \{z \in \mathbb{C}$ *tels que* $|z| < 1\}$ *et grossièrement divergente sinon.*

(4) : *la série* $\sum \frac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}$ *est convergente.*

(5) : *la série* $\sum \frac{n^n}{n!}$ *est divergente.*

3) Comparaison et sommation des relations de comparaison de séries vectorielles

Théorème *(12)*

Soient (u_n) une suite vectorielle, (v_n) une suite réelle positive. On suppose $u_n = O(v_n)$ (resp. $u_n = o(v_n)$, $u_n \sim v_n$).

(i) *Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge aussi et $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = O\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$ (resp. o, $\sim$).*

(ii) *Si $\sum v_n$ diverge alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = O\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$ (resp. o, $\sim$).*

Exercice 9 : Applications

Montrer les résultats suivants :

(1) : *Lemme de* Cesàro *: soit (u_n) une suite vectorielle convergeant vers $\ell \in E$. Alors la suite de terme général $v_n = \frac{1}{n+1}(u_0 + \cdots + u_n)$ converge aussi vers ℓ.*

(2) : *Lemme de* Cesàro *: soit (u_n) une suite réelle divergeant vers$+\infty$. Alors la suite de terme général $v_n = \frac{1}{n+1}(u_0 + \cdots + u_n)$ diverge aussi vers $+\infty$.*

(3) : *Équivalent du reste : soit (u_n) une suite réelle positive telle que $u_n \sim \frac{\lambda}{n^\alpha}$ avec $\lambda > 0$ et $\alpha > 1$.*

Alors $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \sim \int_{[n,+\infty[} \frac{\lambda \mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{\lambda}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.

Exercice 10 :

Déterminer un équivalent du reste de la série $\sum \frac{3n}{n^3+1}$.

Même question pour $\sum \frac{1}{n+\sqrt{n}}$

Exercice 11 : Développement à trois termes de H_n

(1) : *Montrer que $H_n \sim \ln(n)$.*

(2) : *Montrer que $(H_n - \ln n)$ est convergente vers une limite finie $\gamma > 0$.*

(3) : *En écrivant que $\ln n = \sum_{k=2}^{n} \ln k - \ln(k-1)$, montrer que $H_n = \ln n + \gamma + \dfrac{1}{2n} + o(1/n)$.*

Exercice 12 : Exemple de transformation d'Abel

Soit la série $\sum \frac{\sin(n)}{n}$. On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(k)$.

(1) : *Montrer que la suite (S_n) est bornée.*

(2) : *En écrivant que $\sin(n) = S_n - S_{n-1}$, montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{\sin k}{k} = \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{S_n}{n(n+1)}\right) - S_0 + \frac{S_{N+1}}{N+1}$.*

(3) : *En déduire que la série $\sum \frac{\sin n}{n}$ est convergente.*

(4) : *En linéarisant $\sin^2$, montrer que la série $\sum \frac{\sin^2(n)}{n}$ diverge. En déduire que la série $\sum \frac{\sin n}{n}$ n'est pas absolument convergente.*

4) Séries doubles

Définition *(13)*

La série double $\sum_p \sum_q a_{pq}$ est dite convergente si :

(i) *pour tout $p \in \mathbb{N}$, la série de terme général a_{pq} converge ; on note $\displaystyle S_p = \sum_{q=0}^{+\infty} a_{pq}$;*

(ii) *la série de terme général S_p converge ; on note $\displaystyle S = \sum_{p=0}^{+\infty} S_p = \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=0}^{+\infty} a_{pq}$.*

En cas de divergence, si les a_{pq} sont des réels positifs, on convient d'écrire $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=0}^{+\infty} a_{pq} = +\infty$.

Exemples *(14)*

$\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{(p+q)^2}=+\infty$, $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{(p+q)^\alpha}$ *converge* $\Longleftrightarrow \alpha>2$.

$\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{p^\alpha+q^\alpha}$ *converge* $\Longleftrightarrow \alpha>2$ *par encadrement de* $\dfrac{|x|^\alpha+|y|^\alpha}{(|x|+|y|)^\alpha}$ *sur le cercle unité de* $\mathbb{R}^2$.

$\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=0}^{+\infty}a_pb_q=(\sum_{p=0}^{+\infty}a_p)(\sum_{q=0}^{+\infty}b_q)$ *lorsque les deux séries simples convergent.*

Remarque : si les a_p et les b_q sont strictement positifs, c'est une CNS.

$\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=0}^{+\infty}(\delta_{p,q+1}-\delta_{q,p+1})=-1$ *et* $\displaystyle\sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}(\delta_{p,q+1}-\delta_{q,p+1})=1$.

Théorème de Fubini *(15)*

(i) *Soit (a_{pq}) une suite double à termes réels positifs. Alors* $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=0}^{+\infty}a_{pq}=\sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}a_{pq}$ *(égalité dans $[0,+\infty]$).*

(ii) *Soit $(a_{pq})\in E^{\mathbb{N}^2}$ telle que l'une des deux séries doubles* $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=0}^{+\infty}\|a_{pq}\|$ *et* $\displaystyle\sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}\|a_{pq}\|$ *est convergente.*

Alors l'autre aussi et les séries doubles $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=0}^{+\infty}a_{pq}$ *et* $\displaystyle\sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}a_{pq}$ *convergent et ont même somme.*

De plus, $\displaystyle\|\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=0}^{+\infty}a_{pq}\|\leqslant\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=0}^{+\infty}\|a_{pq}\|$.

Exemples *(16)*

$$\sum_{p=2}^{+\infty}(\zeta(p)-1)=\sum_{p=2}^{+\infty}\sum_{q=2}^{+\infty}\frac{1}{q^p}=\sum_{q=2}^{+\infty}\sum_{p=2}^{+\infty}\frac{1}{q^p}=\sum_{q=2}^{+\infty}\frac{1}{q(q-1)}=1.$$

$$\sum_{p=2}^{+\infty}(\eta(p)-1)=\sum_{p=2}^{+\infty}\sum_{q=2}^{+\infty}\frac{(-1)^{q+1}}{q^p}=\sum_{q=2}^{+\infty}\sum_{p=2}^{+\infty}\frac{(-1)^{q+1}}{q^p}=\sum_{q=2}^{+\infty}\frac{(-1)^{q+1}}{q(q-1)}=1-2\ln(2).$$

Théorème : Séries doubles sur un triangle *(17)*

Soit $(a_{pq})\in E^{\mathbb{N}^2}$. La relation $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=p}^{+\infty}a_{pq}=\sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{q}a_{pq}$ *a lieu si les a_{pq} sont réels positifs ou si l'une des séries doubles* $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=p}^{+\infty}\|a_{pq}\|=\sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{q}\|a_{pq}\|$ *est convergente.*

Théorème : sommation par diagonales *(18)*

Soit $(a_{pq})\in E^{\mathbb{N}^2}$ et $\displaystyle S_n=\sum_{p+q=n}a_{pq}$.

La relation $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=0}^{+\infty}a_{pq}=\sum_{n=0}^{+\infty}S_n$ *a lieu si les a_{pq} sont réels positifs ou si la série double de terme général $\|a_{pq}\|$ est convergente. Dans ce dernier cas, la série $\sum\|S_n\|$ est aussi convergente.*

Exemple et contre exemple : *(19)*

Exemple : pour $\alpha > 2$, $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{(p+q)^\alpha} = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n-1}{n^\alpha} = \zeta(\alpha-1)-\zeta(\alpha)$.

Contre-exemple : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p+q=n}(\delta_{p,q+1}-\delta_{q,p+1}) = 0$.

Théorème : produit de CAUCHY : *(20)*

Soient $(a_n) \in E_1^{\mathbb{N}}$, $(b_n) \in E_2^{\mathbb{N}}$ *et* $B : E_1 \times E_2 \to E$ *une application bilinéaire entre ev de dimensions finies. On pose* $\displaystyle c_n = \sum_{p+q=n} B(a_p, b_q)$.

Si les séries $\sum \|a_n\|$ *et* $\sum \|b_n\|$ *sont convergentes alors* $\sum \|c_n\|$ *l'est aussi et* $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} c_k = B(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k, \sum_{k=0}^{+\infty} b_k)$.

Cas particulier : *si* $\sum a_n$ *et* $\sum b_n$ *sont des séries complexes absolument convergentes alors* $\sum c_n$ *avec* $c_n = \sum_{p+q=n} a_p \cdot b_q$ *l'est aussi et* $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} c_k = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} b_k\right)$.

Exemples *(21)*

(1) : *Pour* $x \in]-1,1[$, $\displaystyle -\ln(1-x) = \sum_{k=1}^{+\infty} x^k/k$ *et* $\displaystyle 1/(1-x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k$, *séries absolument convergentes.*

Donc $\displaystyle -\ln(1-x)/(1-x) = \sum_{k=1}^{+\infty} H_k x^k$

(2) : *Pour* $z \in \mathbb{C}$ *avec* $|z| < 1$ *et* $p \in \mathbb{N}$, *on a* $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{k+p}{p} z^k = (1-z)^{-p-1}$.

(3) : *Pour* $M \in \mathcal{M}_q(\mathbb{C})$ *avec* $Sp(M) \subset \mathring{D}$ *et* $p \in \mathbb{N}$, *on a* $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{k+p}{p} M^k = (I_q - M)^{-p-1}$.

Théorème : Permutation des termes d'une série : *(22)*

Soit $(a_n) \in E^{\mathbb{N}}$ *telle que* $\sum \|a_n\|$ *est convergente et* $\sigma \in S_{\mathbb{N}}$. *Alors la série* $\sum a_{\sigma(n)}$ *et convergente et a même somme que* $\sum a_n$.

Contre-exemple si $\sum \|a_n\|$ diverge : *(23)*

$(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8})+\ldots = \frac{1}{2}\ln 2$.

5) La série exponentielle

Norme d'algèbre : *(24)*

Soit A *une* $\mathbb{K}$*-algèbre. Une norme d'algèbre est une norme sur* A *en tant qu'espace vectoriel, vérifiant de plus :* $\forall\, a, b \in A$, $\|ab\| \leqslant \|a\|\|b\|$ *et* $\|1_A\| = 1$.

Exemples *(25)*

(1) : $\mathcal{B}(X,\mathbb{K})$ *avec* $\|\ \|_\infty$,

(2) : $\mathbb{K}[X]$ *avec* $\|\sum_i a_i X^i\| = \sum_i |a_i|$,

(3) : $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *avec* $\displaystyle\|(a_{ij})\| = \max_{i\in[\![1,n]\!]}\{\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\}$.

(4) : $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *avec une norme subordonnée.*

Théorème : définition de l'exponentielle dans une algèbre de dimension finie *(26)*

Toute $\mathbb{K}$-algèbre A de dimension finie peut être munie d'une norme d'algèbre.
Et pour tout élément $a \in A$, la série de terme général $a^n/n!$ est absolument convergente.
On note $\exp(a) = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k/k!$.

Exemples dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: *(27)*

(1) : $\exp\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & e-1 \\ 0 & e \end{pmatrix}$,

(2) : $\exp\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & e-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

(3) : $\exp\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & 2e \\ 0 & e \end{pmatrix}$.

Propriétés *(28)*

(1) : *Si $A = \mathbb{R}$, on retrouve la fonction exponentielle usuelle.*
(2) : $\exp(0_A) = 1_A$.
(3) : *Si $ab = ba$, $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$.*
(4) : $\exp(a)$ *est inversible et* $\exp(a)^{-1} = \exp(-a)$.
(5) : $\|\exp(a)\| \leqslant e^{\|a\|}$ *(faux si $\|\ \|$ n'est pas une norme d'algèbre).*

Exponentielle d'une matrice carrée *(29)*

Si $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $P \in GL_p(\mathbb{K})$ alors $\exp(P^{-1}MP) = P^{-1}\exp(M)P$.
Si $M = PDiag(\lambda_1, \dots, \lambda_p)P^{-1}$ alors $\exp(M) = PDiag(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_p})P^{-1}$.
Si $M = \lambda I_p + N$ avec N nilpotente d'indice q alors $\exp(M) = e^{\lambda}(I_q + N + \cdots + N^{q-1}/(q-1)!)$.
On peut donc calculer $\exp(M)$ pour M quelconque en trigonalisant fortement M. Dans les cas pratiques, l'usage d'un polynôme annulateur pour M conduit à un calcul plus rapide.

Exemple : *(30)*

$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ *: $Sp(M) = \{-1, 3\}$ donc $Sp(M+I_2) = \{0, 4\}$ et $(M+I_2)^2 = 4(M+I_2)$, ce qui donne* $\exp(M+I_2) = I_2 + \frac{e^4-1}{4}(M+I_2)$, *puis* $\exp(M) = e^{-1}(I_2 + \frac{e^4-1}{4}(M+I_2))$.

Autres propriétés *(31)*

(1) : $\exp({}^tM) = {}^t\exp(M)$.
(2) : $\det(\exp(M)) = e^{Tr\,(M)}$.
(3) : $\exp(M) \in \mathbb{K}[M]$.
(4) : *Si E est un $\mathbb{K}$-ev de DF, si $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ est une base de E alors $Mat_{\mathcal{B}}(\exp(f)) = \exp(Mat_{\mathcal{B}}(f))$.*

Théorème : Continuité et dérivation *(32)*

(1) : *L'application* $\exp$ *est continue sur A.*
(2) : *Pour $a \in A$ fixé, l'application $t \to \exp(ta)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\exp(ta)) = a\exp(ta) = \exp(ta)a$.*
Elle est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Théorème : Réciproques *(33)*

(i) *Soit $f : \mathbb{R} \to A$ dérivable telle que $f' = af$ où $a \in A$ est un élément fixé.*
Alors $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \exp(ta)f(0)$.
(ii) *Soit $f : \mathbb{R} \to A$ dérivable telle que $f' = fa$ où $a \in A$ est un élément fixé.*
Alors $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $f(t) = f(0)\exp(ta)$.
(iii) *Soit $f : \mathbb{R} \to A^*$ continue telle que $\forall\, t, s \in \mathbb{R}$, $f(t+s) = f(t)f(s)$.*
Alors il existe $a \in A$ tel que $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \exp(ta)$.

Théorème *(34)*

Système différentiel : Soit $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ fixée et $X : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{p1}(\mathbb{K})$ dérivable.
On a $X' = MX \Longleftrightarrow \forall\, t \in \mathbb{R}$, $X(t) = \exp(tM)X(0)$.