Fonction d'une variable réelle

On considère ici des fonctions définies sur un intervalle non trivial $I \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans un $\mathbb{K}$-evn de dimension finie, E.

Le cas $E = \mathbb{K}$ correspond aux résultats vus en MPSI. Dans un cadre plus général où E est de dimension finie, on peut le munir d'une base $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et se ramener souvent à l'étude de ses n **fonctions composantes** f_i à valeurs dans $\mathbb{K}$ telles que $f(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t) e_i$.

I — Dérivation

1) Dérivée première

Définition *(1)*

Soit f une fonction définie sur $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans E de dimension finie.
Soit a un point intérieur à I.

(1) : *Taux d'accroissement en a : pour $h \neq 0$ et proche de 0, on pose $T_a(h) = \dfrac{1}{h} \cdot (f(a+h) - f(a)) \in E$.*

(2) : *Dérivées à droite et à gauche de a : **sous réserve d'existence d'une limite finie dans E,** on pose $f'_d(a) = \lim\limits_{t \to a, t > a} T_a(h)$ et $f'_g(a) = \lim_{t \to a, t < a} T_a(h)$. On dit alors que f est dérivable à droite et/ou à gauche en a.*

(3) : *Dérivée en a : **sous réserve d'existence d'une limite finie dans E,** on pose $f'(a) = Df(a) = \dfrac{df}{dt}(a) = \lim\limits_{h \to 0} T_a(h)$. On dit alors que f est dérivable en a.*

(4) : *f est dérivable en $a \Leftrightarrow f$ est dérivable à gauche et à droite de a et $f'_d(a) = f'_g(a)$.*

Théorème *(2)*

(1) : *f est dérivable en a si et seulement s'il existe un développement limité de la forme : $f(a+h) = \alpha + h\beta + o(h)$.*
Dans ce cas, $\alpha = f(a)$ et $\beta = f'(a)$.
On note aussi $f(t) = f(a) + (t-a)f'(a) + o(t-a)$.

(2) : *En conséquence, si f est dérivable en a alors elle est continue en a.*

Dérivation des fonctions composantes *(3)*

(1) : *Soit $\beta = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de E. La fonction f est dérivable en a si et seulement si chacune de ses fonctions composantes f_i est dérivable en a et on a alors :*

$$f'(a) = \sum_{i=1}^{n} f'_i(a) e_i.$$

(2) : *Ce résultat se généralise au cas de l'étude de la dérivée d'une fonction à valeurs dans un espace produit.*

Exercice 1 : Arc paramétré

Soit $f : t \mapsto (\cos t - 1 + t^2/2, \sin t - t + t^3/6)$.

(1) : *Déterminer le domaine de définition de f, son domaine de dérivabilité et sa dérivée.*

(2) : *On dit qu'un point $(x(t), y(t))$ de l'arc paramétré C est régulier si et seulement si $f'(t) \neq 0$. Déterminer les points non réguliers de f*

(3) : *Étudier $\lim_{t \to 0} \dfrac{x(t)}{y(t)}$ et interpréter ce résultat.*

Propriétés *(4)*

(1) : *Une combinaison linéaire de fonctions dérivables en a est dérivable en a et* $(\lambda f+g)'(a)=\lambda f'(a)+g'(a)$.

(2) : *Soit L une application linéaire de E dans F et f dérivable en a. Alors $L\circ f$ est dérivable en a et :*

$$(L\circ f)'(a)=L(f'(a)).$$

(3) : *Si E est une algèbre, le produit de deux fonctions dérivables en a est dérivable en a et*

$$(fg)'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a).$$

(4) : *Si B est bilinéaire de $E\times F$ dans G et si $f:I\to E$ et $g:I\to F$ sont dérivables en a, alors $B(f,g)$ est dérivable en a et*

$$(B(f,g))'(a)=B(f'(a),g(a))+B(f(a),g'(a)).$$

(5) : *Si $f:I\to E$ est dérivable en b et $\varphi:J\to I$ est dérivable en a tel que $\varphi(a)=b$, alors $f\circ\varphi$ est dérivable en a et*

$$(f\circ\varphi)'(a)=\varphi'(a)\cdot f'(\varphi(a)).$$

Exercice 2 : Bijection réciproque

Retrouver l'énoncé concernant la bijection réciproque d'une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Exercice 3 : Classique

Soit f dérivable de $I\subset\mathbb{R}$ dans E. On note $\|u\|=\sqrt{<u|u>}$ une norme euclidienne sur E.

(1) : *Montrer que $t\mapsto\|f(t)\|^2$ est dérivable sur I et déterminer sa dérivée.*

(2) : *En déduire que si $\|f(t)\|=1$ pour tout $t\in I$, les vecteurs $f(t)$ et $f'(t)$ sont orthogonaux pour tout $t\in I$.*

(3) : *On suppose de plus que f ne s'annule pas. Étudier l'existence et l'expression de la dérivée de $t\mapsto\|f(t)\|$.*

Exercice 4 : Dérivée d'une fonction multilinéaire

Pour tout réel x, on pose :

$$D_n(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & & & (0)\\ x^2/2! & x & 1 & & \\ x^3/3! & x^2/2! & x & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1\\ x^n/n! & \cdots & \cdots & x^2/2! & x \end{vmatrix}.$$

1. *Montrer que D_n est une fonction dérivable et calculer $D_n'(x)$.*

2. *En déduire l'expression de $D_n(x)$.*

2) Inégalité des accroissements finis

Exercice 5 : Contre exemple pour Rolle

(1) : *Montrer que pour $f:\mathbb{R}\to E$, le théorème de Rolle n'est plus vrai lorsque $\dim E\geqslant 2$.*

(2) : *Quid pour l'égalité des accroissements finis ?*

Théorème : INégalité des accroissements finis *(5)*

Soit f continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ telle que $\|f'(x)\|\leqslant k$ pour tout $x\in\,]a,b[$.
Alors $\|f(b)-f(a)\|\leqslant k(b-a)$.

Corollaires très importants : *(6)*

(1) : **Caractérisation des fonctions lipschitziennes :**
Soit f continue sur I, dérivable sur $\mathring{I}$: f est k-lipschitzienne sur $I \Longleftrightarrow \forall\, x \in \mathring{I},\ \|f'(x)\| \leqslant k$.
(2) : **Caractérisation des fonctions constantes :**
Soit f continue sur I, dérivable sur $\mathring{I}$: f est constante sur un intervalle $I \Longleftrightarrow \forall\, x \in \mathring{I},\ f'(x) = 0$.
Deux primitives sur un intervalle I d'une même fonction diffèrent par une fonction constante.
(3) : **Théorème du prolongement dérivable :**
Soit f continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f'(x) \underset{x\to a^+}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$.
Alors f est dérivable à droite en a et $f'_d(a) = \ell$.

Exercice 6 : Contre-exemple pour la réciproque du dernier énoncé

Soit $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ pour $x \neq 0$.
Comment prolonger f en 0 par continuité ? Ce prolongement est-il dérivable ? Ce prolongement est-il C^1 ?

3) Dérivées successives

Définitions *(7)*

Pour $f : I \to E$, on définit sous réserve d'existence : $f^{(0)} = f$, $f^{(n)} = (f')^{(n-1)}$.
On note $C^n(I, E)$ l'ensemble des fonctions f telles que $f, \ldots, f^{(n)}$ existent et sont continues sur I.
On note $\mathcal{C}^\infty(I, E)$ l'ensemble des fonctions f dérivables à tout ordre sur I.

Propriétés *(8)*

(1) : *Stabilité de la classe $\mathcal{C}^n$ par combinaison linéaire, produit, composition, réciproque.*
(2) : *Formule de* Leibniz *: soit $B : E \times F \to G$ une application bilinéaire et $f : I \to E$ et $g : I \to F$ des fonctions de classe C^n sur $I \subset \mathbb{R}$. Alors $B(f, g) : I \to G$ est de classe C^n et*

$$(B(f, g))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B(f^{(n-k)}, g^{(k)}).$$

(3) : **Prolongement de classe $\mathcal{C}^n$:**

- *Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $]a, b]$, alors f se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$ si et seulement si les dérivées $f^{(0)}$,...,$f^{(n)}$ ont des limites finies en a^+.*
- *Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[c, a[$ et sur $]a, b]$, alors f se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[c, b]$ si et seulement si pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\lim\limits_{x\to a^+} f^{(k)}(x)$ et $\lim\limits_{x\to a^-} f^{(k)}(x)$ existent, sont finies et égales.*

Exercice 7 : Leibniz

Calculer la dérivée n-ème par rapport à x des expressions $x^2 e^x$ puis $\dfrac{e^{2x}}{1+x}$

Exercice 8 : Recollement $\mathcal{C}^\infty$

(1) : *Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \exp(1/(x^2 - 1))$ si $-1 < x < 1$ et $f(x) = 0$ sinon est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.*
(2) : *Soit $a = \displaystyle\int_{[-1,1]} f > 0$ et $g(x) = \dfrac{1}{a} \displaystyle\int_{-3}^{x} (f(t+2) - f(t-2))\,\mathrm{d}t$.*
Montrer que g est aussi $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[0, 1]$, nulle sur $\mathbb{R} \setminus [-3, 3]$ et constante égale à 1 sur $[-1, 1]$.

II — Fonctions convexes

Définition : fonction convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ *(9)*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est convexe sur I si et seulement si :

$$\forall (x_1, x_2) \in I^2, \forall \lambda \in [0,1], f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

On dit que f est concave si et seulement si $-f$ est convexe.

Exercice 9 : Somme et produit de fonctions convexes

Soient f et g deux fonctions convexes sur I. Montrer que $f+g$ est une fonction convexe, mais que $f \cdot g$ ne l'est pas nécessairement.

Propriétés *(10)*

(1) : *$f : I \to \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si l'image de tout barycentre à coefficients positifs est inférieure ou égale au barycentre correspondant des images : $f(\sum \lambda_i x_i) \leqslant \sum \lambda_i f(x_i)$.*
(2) : *f est affine $\Longleftrightarrow$ f est convexe et concave.*
(3) : *f est convexe $\Longleftrightarrow$ l'épigraphe de f : $\{(x,y) \in I \times \mathbb{R}$ tel que $y \geqslant f(x)\}$ est convexe.*

Caractérisation par l'inégalité des pentes *(11)*

f est convexe si et seulement si pour tous $(a,b,c) \in I^3$ avec $a < b < c$, on a

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \frac{f(c)-f(b)}{c-b}.$$

Caractérisation par la position relative de la courbe et des cordes *(12)*

Soit f convexe, $a < b$ et g la fonction affine coïncidant avec f en a et en b. Alors pour $x \in [a,b]$, on a $f(x) \leqslant g(x)$ et pour $x \in I \backslash]a,b[$ on a $f(x) \geqslant g(x)$.

Conséquences : *(13)*

Soit f convexe sur I.
(i) *f est décroissante ou croissante ou décroissante puis croissante. De plus f admet des limites finies ou infinies aux bornes de I.*
(ii) *f continue sur $\mathring{I}$.*
(iii) *f est dérivable à droite et à gauche sur $\mathring{I}$ et pour tous $a,b,c \in I$ avec $a < b < c$, on a :*
$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant f'_g(b) \leqslant f'_d(b) \leqslant \dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}$. *De plus les fonctions f'_g et f'_d sont croissantes sur $\mathring{I}$.*

Caractérisation par la position relative de la courbe et des tangentes *(14)*

Soit f dérivable sur $\mathring{I}$. Alors f est convexe sur I si et seulement si pour tout $a \in \mathring{I}$, le graphe de f est au dessus de sa tangente en a.
En particulier pour f convexe, si $f'(a) = 0$ alors $f(a) = \min f$.

Cas de fonctions dérivables ou deux fois dérivables *(15)*

(1) : *Si f est continue sur I et dérivable sur $\mathring{I}$ alors f est convexe si et seulement si f' est croissante.*
(2) : *Si f est continue sur I et deux fois dérivable sur $\mathring{I}$ alors f est convexe si et seulement si f'' est positive.*

Exercice 10 : Exemples d'inégalités de convexité

$\forall x \in]-1,+\infty[$, $\forall \alpha \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$, $(1+x)^\alpha \geqslant 1 + \alpha x$.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant 1 + x$.
$\forall x \in]-1,+\infty[$, $\dfrac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.
$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\frac{2}{\pi} x \leqslant \sin x \leqslant x$.

Exercice 11 : Inégalité arithmético-géométrique-quadratique

(1) : *Soient $x_1, \dots x_n$ des réels strictement positifs. En utilisant la convexité de la fonction $-\ln$, montrer que*

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

(2) : *En utilisant la convexité de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$, montrer que*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{n} \leqslant \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k^2}.$$

Exercice 12 : Hölder

Soient $p, q \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

(1) : *Montrer que pour tous réels positifs u, v, $uv \leqslant \dfrac{u^p}{p} + \dfrac{v^q}{q}$.*

(2) : *En déduire que pour $a_k, b_k \in \mathbb{C}$, $|a_k b_k| \leqslant \dfrac{|a_k|^p}{p} + \dfrac{|b_k|^q}{q}$ puis que pour tout couple (a, b) de suites complexes,*

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k b_k| \right) \leqslant \left(\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} |b_k|^q \right)^{1/q}.$$

III — Intégrale sur un segment

1) Fonctions en escalier

Définition *(16)*

(1) : *$f : [a, b] \to E$ est en escalier s'il existe une subdivision $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ de $[a, b]$ telle que pour tout i, $f_i = f_{|]a_i, a_{i+1}[}$ est constante.*
(2) : *On pose alors $\int_{[a,b]} f = \sum_i (a_{i+1} - a_i) f_i \in E$ (**c'est un vecteur !**).*
Cette définition est indépendante de la subdivision σ choisie parmi les subdivisions adaptées à f.

Propriétés *(17)*

(1) : *$\int_{[a,b]} f$ est inchangée lorsque f est modifiée en un nombre fini de points.*
(2) : *Linéarité, calcul coordonnée par coordonnée.*
(3) : *Positivité : si $f \geqslant 0$, alors $\int_{[a,b]} f \geqslant 0$. Croissance : si $f \leqslant g$, alors $\int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} g$.*
(4) : *Inégalité triangulaire : $\| \int_{[a,b]} f \| \leqslant \int_{[a,b]} \|f\| \leqslant (b-a) \|f\|_\infty$.*
(5) : *Relation de* Chasles.

a) Fonctions continues par morceaux

Théorème *(18)*

Soit $f : [a, b] \to E$ continue par morceaux. Alors :
(1) : *Il existe une suite (f_n) de fonctions en escalier telle que $\|f_n - f\|_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.*
(2) : *Pour toute telle suite, la suite $(\int_{[a,b]} f_n)$ est convergente et sa limite ne dépend pas de la suite (f_n) considérée.*
(3) : *On pose par définition $\int_{[a,b]} f = \lim_{n\to\infty} (\int_{[a,b]} f_n)$.*

Propriétés *(19)*

(1) : $\int_{[a,b]} f$ *est inchangée lorsque f est modifiée en un nombre fini de points.*
(2) : *Linéarité, calcul coordonnée par coordonnée,*
(3) : *Positivité, croissance.*
(4) : *Inégalité triangulaire :* $\| \int_{[a,b]} f\| \leqslant \int_{[a,b]} \|f\| \leqslant (b-a)\|f\|_\infty$.
(5) : *Relation de* CHASLES.
(6) : **Théorème de l'intégrale nulle :** *si f est* ***continue*** *positive et* $\int_{[a,b]} f = 0$ *alors* $f = 0$.

2) Intégrale fonction de sa borne supérieure

Définition *(20)*

$f : I \to E$ est continue par morceaux si pour tout segment $[a,b] \subset I$, la restriction $f_{|[a,b]}$ l'est et on pose alors pour $x, y \in I$:
$\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{[x,y]} f$ *si* $x < y$ *ou bien* $-\int_{[y,x]} f$ *si* $x > y$ *ou bien* 0 *si* $x = y$.

Théorème fondamental de l'analyse *(21)*

Soit f continue sur I, $a \in I$ et $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour $x \in I$ variable.
(1) : *F est continue sur I.*
(2) : *F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $F' = f$.*
(3) : *si f est bornée sur I alors F est $\|f\|_\infty$-lipschitzienne sur I.*

Conséquences *(22)*

(1) : **Intégrale et crochet :** *si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I alors pour tous $x, y \in I$,* $\int_x^y f'(t)\,\mathrm{d}t = [f(t)]_x^y = f(y) - f(x)$.

(2) : **Dérivation :** *si u et v sont de classe C^1 et f est continue,* $G : x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$ *est de classe C^1 et*

$$G'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x)).$$

(3) : **Changement de variables :** *si f est continue sur I et $\varphi : J \to I$ est de classe $\mathcal{C}^1$ alors pour tous $x, y \in J$:*

$$\int_x^y f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(x)}^{\varphi(y)} f(u)\,\mathrm{d}u.$$

(4) : **Intégration par parties :** *si f, g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I alors pour tous $x, y \in I$:*

$$\int_x^y f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = [f(t)g(t)]_x^y - \int_x^y f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 13 : Généralisation de l'IPP

Si f, g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et B est une application bilinéaire, montrer que pour tous $x, y \in I$:
$$\int_x^y B(f(t), g'(t))\,\mathrm{d}t = [B(f(t), g(t))]_x^y - \int_x^y B(f'(t), g(t))\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 14 :

Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I alors pour tous $x \neq y$: $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} = \displaystyle\int_0^1 f'((1-t)x + ty)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 15 :

Étudier le domaine de dérivabilité et dériver $G : x \mapsto \displaystyle\int_{x^2}^{\ln x} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$

Exercice 16 :

On considère la fonction H définie sur $]1,+\infty[$ par $H(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.

1. *Montrer que H est C^1 sur $]1,+\infty[$ et calculer sa dérivée.*

2. *Montrer que la fonction u définie par $u(x) = \dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}$ admet une limite finie en $x = 1$.*

3. *En utilisant la fonction u de la question 2., calculer la limite en 1^+ de la fonction H.*

IV — Formules de Taylor

Théorème *(23)*

Soit $f : I \to E$ de classe $\mathcal{C}^n$ et $(a,b) \in I^2$.

Formules globales :

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \cdots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t. \text{ (reste intégral)}$$

$$\|f(b) - f(a) - \cdots - \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a)\| \leqslant \frac{|b-a|^n}{n!} \sup\{\|f^{(n)}(t)\|,\ t \in [a,b]\} \text{ (Lagrange)}.$$

Formule locale :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + o(h^n) \text{ (Young)}.$$

Exercice 17 : Développements en série entière

(1) : *Déterminer $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,* $\exp(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.

(2) : *Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.*

(3) : *Mêmes questions pour $\ln(1+x)$ sur $\{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\}$.*

V — Sommes de Riemann

Définition *(24)*

Soit $f : [a,b] \to E$, $\sigma = (a_0, \ldots, a_n)$ une subdivision de $[a,b]$ et $\xi = (c_0, \ldots, c_{n-1})$ une liste de points intermédiaires ($\forall\, i,\ a_i \leqslant c_i \leqslant a_{i+1}$). On note $p(\sigma) = \max\{a_{i+1} - a_i\}$ et $S_{\sigma,\xi}(f) = \sum_i (a_{i+1} - a_i) f(c_i)$.

Théorème des sommes de Riemann *(25)*

(1) : **Cas général :** *si f est continue par morceaux alors* $S_{\sigma,\xi}(f) \underset{p(\sigma)\to 0}{\longrightarrow} \displaystyle\int_{[a,b]} f$.

(2) : **Cas particulier de sommes à pas constant :** *en notant $a_i = a + i\frac{b-a}{n}$:*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(a_i) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} f \text{ et } \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_i) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} f$$

Exercice 18 : Exemples

(1) : *Montrer que* $\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\ln 2$.

Exercice 19 : Inégalité de Jensen

(1) : *Si* f *est continue sur* $[a,b]$ *et* φ *est convexe continue sur* $f([a,b])$ *alors* $\varphi(\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_{[a,b]} f)\leqslant \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_{[a,b]}\varphi\circ f$ *(inégalité de* JENSEN*).*

VI — Courbes paramétrées

1) Définitions

Définitions *(26)*

(1) : *Un arc paramétré est la donnée de* $\Gamma=(I,\gamma)$ *où* I *est un intervalle d'intérieur non vide de* $\mathbb{R}$ *et* γ *une fonction de* I *dans* E.
(2) : *Le support de* Γ *est l'ensemble* $\gamma(I)$.
(3) : *Un point de l'arc est la donnée d'un couple* $(t,\gamma(t))$ *où* $t\in I$ *: c'est le point de paramètre* t.
(4) : *L'arc* Γ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *si* γ *l'est.*

Exemples *(27)*

(1) : *Graphe d'une fonction* $(t,f(t))$, *cercle* $(\cos t,\sin t)$, *ellipse* $(a\cos t,b\sin t)$,
(2) : *Branche d'hyperbole :* $(a\operatorname{ch} t,b\operatorname{sh} t)$ *(ou bien* $(-a\operatorname{ch} t,b\operatorname{sh} t)$*).*
(3) : *Parabole :* $(t,t^2/2p)$.
(4) : *Cycloïde :* $(x(t)=R(t-\sin t),\ y(t)=R(1-\cos t))$,
(5) : *Hélice circulaire dans* $\mathbb{R}^3$ *:* $(x(t)=R\cos t,\ y(t)=R\sin t,\ z(t)=ht/2\pi)$.

2) Tangente et normale

Définition *(28)*

(1) : *Soit* $\Gamma=(I,\gamma)$ *avec* $\gamma:t\mapsto(t,f(t)$. *Alors lorsque cela a un sens,* $\gamma'(t_0)=(1,f'(t_0))$ *est un vecteur directeur de la tangente à l'arc en* t_0.
(2) : *Plus généralement, on dit que* $t_0\in I$ *est un paramètre régulier si* γ *est dérivable ne* t_0 *et si* $\gamma'(t_0)\neq 0$.
On dit que Γ *est un arc paramétré régulier si tous les points de* Γ *sont des points de paramètres réguliers.*
Si t_0 *est un paramètre régulier, la tangente au point* t_0 *est la droite affine* $\gamma(t_0)+\mathbb{R}\cdot\gamma'(t_0)$.

Définition *(29)*

La normale au point de paramètre t_0 *(régulier) est la perpendiculaire à la tangente au point de paramètre* t_0 *passant par* $\gamma(t_0)$.

En pratique *(30)*

On se place dans le cas particulier d'un arc paramétré dans un plan.
(1) : *Un point* $M(x,y)$ *est un point de la tangente à* Γ *au point de paramètre régulier* y_0 *si et seulement si* $det(M-\gamma(t_0),\gamma'(t_0))=0$
En notant $\gamma(t_0)=(x_0,y_0)$ *et* $\gamma'(t_0)=(x_0',y_0')$, *une équation de la tangente est donc donnée par :*

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & x_0' \\ y-y_0 & y_0' \end{vmatrix}=y_0'(x-x_0)-x_0'(y-y_0)=0.$$

(2) : *Un point* $M(x,y)$ *est un point de la normale à* Γ *au point de paramètre régulier* y_0 *si et seulement si* $<M-\gamma(t_0)|\gamma'(t_0)>=0$
En notant $\gamma(t_0)=(x_0,y_0)$ *et* $\gamma'(t_0)=(x_0',y_0')$, *une équation de la tangente est donc donnée par :*

$$x_0'(x-x_0)+y_0'(y-y_0)=0.$$

Méthode : étude d'un arc paramétré *(31)*

(1) : *Préciser le domaine de définition de l'arc paramétré.*
(2) : *Réduire le domaine d'étude par parité et ou périodicité et ou symétries.*
(3) : *Préciser la classe et étudier les fonctions $x : t \mapsto x(t)$ et $y : t \mapsto y(t)$.*
(4) : *Tracer le support de l'arc en commençant par placer des points remarquables et leurs tangentes (en particulier les tangentes horizontales et verticales) et en respectant les symétries.*

Exercice 20 : Exemple

Étudier l'arc paramétré par $x(t) = \sin(2t)$ et $y(t) = \sin(3t)$.

VII — Travaux dirigés : d'après CCP-PSI-2014

Pour toute fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, on note

$$L(f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt$$

une expression intégrale de la longueur de la courbe représentative de f.

I. Quelques exemples de calculs de longueurs

I.1. Vérifier la formule donnant $L(f)$ pour f définie sur $[0, 1]$ par $f(t) = t$.

I.2. Calculer $L(f)$ pour f définie sur $[0, 1]$ par $f(t) = \mathrm{ch}(t)$.

I.3. Un exemple de calcul de longueur d'un arc de courbe.

I.3.1 Calculer $L(f)$ pour f définie sur $[0, 1/\sqrt{2}]$ par $f(t) = \sqrt{1 - t^2}$.

I.3.2 Retrouver le résultat de la question précédente sans calcul, par des considérations géométriques.

I.4. Soit f définie sur $[0, 1]$ par $f(t) = t^2$. Calculer $L(f)$, en utilisant une intégration par parties ou en s'inspirant de la question **I.2**.

II. Longueur du graphe des fonctions puissances

On s'intéresse ici, pour tout entier $n \geqslant 1$, aux fonctions puissances p_n définie sur $[0, 1]$ par :

$$\forall t \in [0, 1],\ p_n(t) = t^n$$

On désigne par $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \lambda_n = L(p_n) = \int_0^1 \sqrt{1 + n^2 t^{2n-2}}\, dt$$

II.1. Conjecture sur la limite éventuelle de $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

II.1.1 Déterminer λ_1 et λ_2.

II.1.2 En traçant, sur un même graphe, les courbes représentatives de quelques fonctions p_n avec n de plus en plus grand, conjecturer la convergence de la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ainsi que la valeur de sa limite éventuelle.

II.2. Convergence et limite de la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

II.2.1 Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\lambda_n - n \int_0^1 t^{n-1}\, dt = \mu_n \quad \text{où} \quad \mu_n = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1 + n^2 t^{2n-2}} + nt^{n-1}}$$

II.2.2 Montrer que $\lambda_n < 2$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

II.2.3 Déterminer la limite de la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ (on pourra couper l'intégrale en deux en écrivant que $\int_0^1 = \int_0^{1-\varepsilon} + \int_{1-\varepsilon}^1$ pour $\varepsilon > 0$).

II.2.4 En déduire la convergence de la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ainsi que la valeur de sa limite.

III. Un résultat inattendu

III.1. Etude de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{\to 0}^{1} \frac{\sin(t)}{t}\, dt$

III.1.1 Montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{\to 0}^{1} \frac{\sin(t)}{t}\, dt$ est convergente.

III.1.2 Montrer que pour tout $x \geqslant 1$, on a

$$\int_{1}^{x} \frac{\sin(t)}{t}\, dt = \cos(1) - \frac{\cos(x)}{x} - \int_{1}^{x} \frac{\cos(t)}{t^2}\, dt$$

En déduire que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{1}^{\to +\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt$ est convergente.

III.1.3 Montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{1}^{\to +\infty} \frac{\cos(2t)}{t}\, dt$ est convergente.

III.1.4 Montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{1}^{\to +\infty} \frac{\sin^2(t)}{t}\, dt$ est divergente vers $+\infty$. En déduire la divergence de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{1}^{\to +\infty} \frac{|\sin(t)|}{t}\, dt$.

III.2. On désigne par g la fonction définie sur $]0,1]$ par $g(t) = \frac{1}{t}\sin\left(\frac{1}{t}\right)$ et par f la fonction définie sur le même intervalle par $f(x) = \int_x^1 g(t)\, dt$.

III.2.1 Montrer que la fonction f se prolonge par continuité en 0. On notera encore f ce prolongement.

III.2.2 Montrer que f est continue sur $[0,1]$ et indéfiniment dérivable sur $]0,1]$.

III.2.3 Montrer que

$$\lim_{x \to 0^+} \int_{x}^{1} |g(t)|\, dt = +\infty$$

III.3. Pour tout réel $x \in]0,1]$, on désigne par $\lambda(x)$ la longueur de la courbe représentative de la restriction de la fonction f au segment $[x,1]$. Donner une expression intégrale de $\lambda(x)$ pour $x \in]0,1]$, puis montrer que $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \lambda(x) = +\infty$. Donner une interprétation de ce résultat.

IV. Continuité de la fonction longueur

On rappelle que l'application

$$f \mapsto \|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$$

définit une norme sur l'espace $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.
On note $E_1 = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continûment dérivables de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et pour toute fonction $f \in E_1$, on note

$$\|f\| = |f(0)| + \|f'\|_\infty$$

IV.1. Comparaison des normes $\|.\|$ et $\|.\|_\infty$

IV.1.1 Montrer que l'application $f \mapsto \|f\|$ définit une norme sur E_1.

IV.1.2 Montrer que

$$\forall f \in E_1,\ \|f\|_\infty \leqslant \|f\|$$

IV.1.3 Les normes $\|.\|$ et $\|.\|_\infty$ sont-elles équivalentes sur E_1 ?

IV.2. On désigne par $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définie sur $[0,1]$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [0,1],\ f_n(t) = \frac{\sin(n\pi t)}{\sqrt{n}}$$

IV.2.1 Montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0,1]$.

IV.2.2 On désigne, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, par $I_n = L(f_n)$ la longueur de la courbe représentative de f_n. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n \geqslant \sqrt{n}\frac{\pi}{2}$$

IV.2.3 L'application $L\ :\ f \mapsto L(f)$ est-elle continue sur $(E_1, \|.\|_\infty)$?

IV.2.4 L'application $L\ :\ f \mapsto L(f)$ est-elle continue sur $(E_1, \|.\|)$?

I. Quelques exemples de calculs de longueurs

I.1. Si $f\ :\ t\in\ [0,1]\mapsto$, le graphe de f est le segment d'origine $(0,0)$ et d'extremité $(1,1)$ et sa longueur est $\sqrt{2}$. C'est cohérent avec

$$L(f)=\int_0^1\sqrt{2}\ dt=\sqrt{2}$$

I.2. On a ici

$$L(f)=\int_0^1\sqrt{1+\mathrm{sh}^2(t)}\ dt=\int_0^1|\mathrm{ch}(t)|\ dt=\int_0^1\mathrm{ch}(t)\ dt=\mathrm{sh}(1)$$

I.3.1. On a $f'(t)=-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ et donc $1+(f'(t))^2=\frac{1}{1-t^2}$. Ainsi,

$$L(f)=\int_0^{1/\sqrt{2}}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\ dt=[\arcsin(t)]_0^{1/\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}$$

I.3.2. Comme $t^2+f(t)^2=1$, la courbe de f est un huitième du cercle unité et sa longueur est $\frac{2\pi}{8}=\frac{\pi}{4}$.

I.4. On a cette fois

$$L(f)=\int_0^1\sqrt{1+4t^2}\ dt$$

Une intégration par partie donne

$$\begin{aligned}L(f)&=\left[t\sqrt{4t^2+1}\right]_0^1-\int_0^1\frac{4t^2}{\sqrt{4t^2+1}}\ dt\\&=\sqrt{5}-L(f)+\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1+4t^2}}\ \text{en écrivant } 4t^2=4t^2+1-1\\&=\sqrt{5}-L(f)+\frac{1}{2}\int_0^2\frac{dt}{\sqrt{1+u^2}}\ \text{en posant } u=2t\end{aligned}$$

On peut alors reconnaître la dérivée de argsh *et conclure. Sinon :*
$u\mapsto\ln(u+\sqrt{u^2+1})$ se dérive en $u\mapsto\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}$ et on a finalement

$$2L(f)=\sqrt{5}+\frac{1}{2}\left[\ln(u+\sqrt{u^2+1})\right]_0^2$$

ou encore

$$L(f)=\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{4}\ln(2+\sqrt{5})$$

II. Longueur du graphe des fonctions puissances

II.1.1 Comme en **I.1** et **I.4**, on a

$$\lambda_1=1\ \text{ et }\ \lambda_2=\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{4}\ln(2+\sqrt{5})$$

II.1.2 On peut penser que (λ_n) converge (en croissant) vers 2.

II.2.1 En écrivant que $nt^{n-1}=\sqrt{n^2t^{2n-2}}$ et en utilisant $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ on obtient directement

$$\lambda_n-n\int_0^1t^{n-1}\ dt=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1+n^2t^{2n-2}}+nt^{n-1}}$$

II.2.2 La fonction f_n dans l'intégrale définissant μ_n est inférieure à 1 (le dénominateur est plus grand que 1) et donc $\mu_n\leqslant 2$. S'il y avait égalité on aurait $\int_0^1(1-f_n)=0$. Comme $1-f_n$ est positive, continue et non nulle, ceci est impossible. Ainsi $\mu_n<2$. De plus $n\int_0^1t^{n-1}\ dt=1$ et donc

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \lambda_n<2$$

II.2.3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les fonctions $t \mapsto \sqrt{1+n^2t^{2n-2}}$ et $t \mapsto nt^{n-1}$ sont croissantes sur $[0,1]$. Donc leur somme est croissante. La fonction f_n qui est l'inverse d'une fonction croissante est donc décroissante sur $[0,1]$.
De plus, $\forall t \in [0,1[, f_n(t) \leqslant 1$ et $\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = 1$ par opérations sur les limites.
Soit $\varepsilon > 0$. On peut écrire $1-\mu_n = \int_0^{1-\varepsilon}(1-f_n(t))dt + \int_{1-\varepsilon}^1(1-f_n(t))dt \leqslant \int_0^{1-\varepsilon}(1-f_n(t)) + \varepsilon$ par croissance de l'intégrale.
Soit N tel que pour $\forall n \geqslant N, \forall t \in [0,1-\varepsilon], (1-f_n(t)) \leqslant \varepsilon$.
Ainsi par croissance de l'intégrale, $0 \leqslant 1-\mu_n \leqslant \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$.
Finalement,

$$\lim_{n\to+\infty} \mu_n = \int_0^1 \, dt = 1$$

II.2.4 Il vient alors immédiatement ($\lambda_n = 1+\mu_n$)

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = 2$$

II.3. En écrivant que $f'(t) = \sqrt{(f'(t)^2}$ (fonction croissante et donc à dérivée positive) on a de même

$$L(f) - \int_0^1 f'(t) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+(f'(t))^2}+f'(t)} \leqslant 1$$

Or, $\int_0^1 f'(t) = f(1) - f(0) = 1$ et donc

$$L(f) \leqslant 2$$

S'il y avait égalité, on aurait l'intégrale de $1 - \frac{1}{\sqrt{1+(f'(t))^2}+f'(t)} = g(t)$ qui serait nulle sur $[0,1]$ et comme g est positive et continue, cela signifierait que g est nulle c'est à dire que f' est nulle ou encore que f est constante ce qui n'est pas le cas ($f(0) \neq f(1)$). On a donc

$$L(f) < 2$$

III. Un résultat inattendu

III.1.1 $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est continue sur $]0,1]$ et tend vers 1 en 0. Elle est donc prolongeable en une fonction continue sur le segment $[0,1]$ et $\int_0^1 f$ existe (intégrale classique).

III.1.2 On opère une intégration par partie en primitivant sin en $-\cos$ et en dérivant $t \mapsto \frac{1}{t}$ en $t \mapsto -\frac{1}{t^2}$. On obtient directement

$$\int_1^x \frac{\sin(t)}{t}\, dt = \cos(1) - \frac{\cos(x)}{x} - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2}\, dt$$

On a $\frac{\cos(t)}{t^2} = O(1/t^2)$ au voisinage de $+\infty$. Il existe donc $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $|\frac{\cos(t)}{t^2}| \leqslant \dfrac{M}{t^2}$ et par croissance de l'intégrale $\int_x^y |\frac{\cos(t)}{t^2}| \leqslant M(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}) \leqslant M$. En particulier $\int_1^x |\frac{\cos(t)}{t^2}| \leqslant M$.
Soit F la primitive de $t \mapsto \frac{\cos(t)}{t^2}$ qui s'annule en 1. Alors F est bornée. Montrons que F admet une limite en $+\infty$. Il suffit de montrer qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que pour tout suite (x_n) tendant vers $+\infty$, $F(x_n) \longrightarrow \ell$. Soient (x_n) et (y_n) deux suites qui tendent vers $+\infty$. Alors $(F(x_n))$ et $(F(y_n))$ sont bornées donc admettent au moins une valeur d'adhérence chacune, disons ℓ_1 pour $(F(x_n))$ et ℓ_2 pour $(F(y_n))$.
Or $|F(x_n) - F(y_n)| \leqslant |\int_{x_n}^{y_n} |\frac{\cos(t)}{t^2}||dt| \leqslant M \cdot \dfrac{1}{\min(x_n, y_n)}$. Lorsque (x_n) et (y_n) tendent vers $+\infty$, on obtient $\ell_1 = \ell_2$.
Finalement : on a montré non seulement que $(F(x_n))$ et $(F(y_n))$ convergent car bornée avec une seule valeur d'adhérence, mais en plus qu'elles convergent vers une limite commune. Donc F admet une limite finie en $+\infty$.
Ainsi, on a l'existence de

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{\sin(t)}{t}\, dt = \cos(1) - \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\, dt$$

III.1.3 On a de même

$$\int_1^x \frac{\cos(2t)}{t}\, dt = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos(2x)}{x} - \sin(2)\right) + \int_1^x \frac{\sin(2t)}{t^2}\, dt$$

$t \mapsto \frac{\sin(2t)}{t^2} = O(1/t^2)$ au voisinage de $+\infty$. Comme à la question précédente, on a l'existence de

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t}\, dt = -\frac{\sin(2)}{2} + \int_1^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{t^2}\, dt$$

III.1.4 On a $\frac{\sin^2(t)}{t} = \frac{1}{2t} - \frac{\cos(2t)}{2t}$ et donc

$$\int_x^1 \frac{\sin^2(t)}{t}\,dt = \frac{\ln(x)}{2} - \int_1^x \frac{\cos(2t)}{2t}\,dx$$

et cette quantité tend vers $+\infty$ quand $x \to +\infty$. Ainsi, l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t}\,dt$ est divergente. Comme $\frac{\sin^2(t)}{t} \geqslant 0$, ceci revient à dire que $t \mapsto \frac{\sin^2(t)}{t}$ n'est pas intégrable sur $[1, \infty[$. Or, $|\sin| \geqslant \sin^2 \geqslant 0$ et donc $t \mapsto \frac{|\sin(t)|}{t}$ n'est pas intégrable non plus sur $[1, +\infty[$. Et comme cette fonction est positive, ceci revient à dire que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t}\,dt$ diverge.

III.2.1 $t \mapsto 1/t$ est de classe C^1 sur $[x, 1]$ pour $x > 0$. On peut donc poser le changement de variable $u = 1/t$. Il indique que

$$f(x) = \int_x^1 \frac{1}{t} \sin\left(\frac{1}{t}\right)\,dt = \int_1^{1/x} \frac{\sin(u)}{u}\,du$$

Avec les questions précédente, f est prolongeable par continuité en 0 en posant

$$f(0) = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\,du$$

III.2.2 g est continue sur $]0, 1]$, $]0, 1]$ est un intervalle qui contient 1. Par théorème fondamental, $-f\ :\ x \mapsto \int_1^x g(t)\,dt$ est une primitive de g sur $]0, 1]$. Comme g est de classe C^∞ sur $]0, 1]$, $-f$, et donc f, l'est aussi. On a vu (ou imposé par choix de $f(0)$) la continuité en 0.

III.2.3 Le même calcul que plus haut donne

$$\int_x^1 |g(t)|\,dt = \int_1^{1/x} \frac{|\sin(u)|}{u}\,du$$

On a vu que l'intégrale de $u \mapsto \frac{|\sin(u)|}{u}$ n'existe pas sur $[1, +\infty[$. Comme cette fonction est positive, son intégrale entre 1 et a tend vers $+\infty$ quand $a \to +\infty$. Ainsi

$$\lim_{x\to 0^+} \int_x^1 |g(t)|\,dt = +\infty$$

IV.3. Pour $t \in]0, 1]$, on a $f'(t) = -g(t)$ et donc $1 + (f'(t))^2 = 1 + \frac{1}{t^2}\sin^2\left(\frac{1}{t}\right)$. Ainsi

$$\forall x \in]0, 1],\ \lambda(x) = \int_x^1 \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}\sin^2\left(\frac{1}{t}\right)}\,dt$$

On en déduit que

$$\forall x \in]0, 1],\ \lambda(x) \geqslant \int_x^1 |g(t)|\,dt$$

et par comparaison

$$\lim_{x\to 0^+} \lambda(x) = +\infty$$

Ceci signifie que la courbe représentative de la fonction f continue sur le segment est $[0, 1]$ est infinie.

IV. Continuité de la fonction longueur

IV.1.1 L'application est positive. Son homogénéité découle de celle de $\|.\|_\infty$ et de celle du module (on a $\|\lambda f\| = |\lambda|.\|f\|$). L'inégalité triangulaire découle de la même propriété pour $\|.\|_\infty$. Enfin, si $\|f\| = 0$ alors $f(0) = \|f'\|_\infty = 0$. f' est donc nulle et f est constante. Comme $f(0) = 0$, f est nulle. On a donc aussi l'axiome de séparation et $\|.\|$ est une norme sur E_1.

IV.1.2 Soit $f \in E_1$. On a

$$\forall x \in [0, 1],\ |f(x)| = \left| f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt \right| \leqslant |f(0)| + \int_x^1 |f'(t)|\,dt \leqslant |f(0)| + (1 - x)\|f'\|_\infty \leqslant \|f\|$$

En passant à la borne supérieure sur x, on en déduit que

$$\|f\|_\infty \leqslant \|f\|$$

IV.1.3 Prenons les fonctions $p_n\ :\ t \mapsto t^n$ de la partie **III** (elles sont dans E_1). On a $\|p_n\|_\infty = 1$ et $\|p_n\| = n$. Le quotient $\|p_n\|/\|p_n\|_\infty$ n'étant pas borné, les normes $\|.\|$ et $\|.\|_\infty$ ne sont pas équivalentes sur E_1.

IV.2.1 On a immédiatement $\|f_n\|_\infty \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ quand $n \to +\infty$. (f_n) est donc uniformément convergente sur $[0,1]$ vers la fonction nulle.

IV.2.2 La définition donne

$$I_n = \int_0^1 \sqrt{1 + n\pi^2 \cos^2(n\pi t)}\, dt$$

Le changement de variable $u = n\pi t$ donne alors

$$I_n = \frac{1}{n\pi} \int_0^{n\pi} \sqrt{1 + n\pi^2 \cos^2(u)}\, du$$

On a alors immédiatement

$$I_n \geqslant \frac{1}{n\pi} \int_0^{n\pi} \sqrt{n\pi^2 \cos^2(u)}\, du = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{n\pi} |\cos(u)|\, du$$

$|\cos|$ étant π périodique, on a finalement

$$I_n \geqslant \sqrt{n} \int_0^{\pi} |\cos(u)|\, du = 2\sqrt{n}$$

Comme $\pi \leqslant 4$ on peut aussi écrire que

$$I_n \geqslant \sqrt{n}\frac{\pi}{2}$$

IV.2.3 Comme $\|f_n - f\|_\infty \to 0$, la continuité de L au sens de $\|.\|_\infty$ entraînerait $L(f_n) \to L(0) = 0$. Comme on a $L(f_n)$ qui est de limite infinie quand $n \to +\infty$ on peut conclure que L n'est pas continue au sens de $\|.\|_\infty$.

IV.2.4 Soient $f, g \in E_1$. On a

$$\begin{aligned}
|L(f) - L(g)| &= \left| \int_0^1 (\sqrt{1 + (f')^2} - \sqrt{1 + (g')^2}) \right| \\
&\leqslant \int_0^1 \frac{|(f')^2 - (g')^2|}{\sqrt{1 + (f')^2} + \sqrt{1 + (g')^2}} \\
&\leqslant \int_0^1 |f' - g'|.|f' + g'| \\
&\leqslant \|f' - g'\|_\infty \|f' + g'\|_\infty \\
&\leqslant \|f - g\| \|f + g\| \\
&\leqslant \|f - g\|(\|f\| + \|g\|)
\end{aligned}$$

Soit (f_n) une suite d'éléments de E_1 qui converge vers f au sens de $\|.\|$. On a donc $\|f_n - f\| \to 0$. Par seconde forme de l'inégalité triangulaires, on en déduit que $\|f_n\| \to \|f\|$. L'inégalité

$$|L(f_n) - L(f)| \leqslant (\|f\| + \|f_n\|)\|f_n - f\|$$

montre alors que $L(f_n) \to L(f)$. L est continue au sens de $\|.\|$.