CONTINUITÉ D'UNE FONCTION VECTORIELLE

Dans tout le chapitre E et F sont des **espaces vectoriels** normés.
Le but est donc de généraliser les notions de limites et continuité à des fonctions à variables et/ou valeurs vectorielles.
En pratique, l'étude s'appliquera :

— aux fonctions numériques d'une ou plusieurs variables réelles ;
— aux fonctions d'une variable complexe ($z \mapsto 1/z$, $z \mapsto e^z$ ...)
— aux applications d'une variable matricielle ($M \mapsto \det(M)$, $M \mapsto M^{-1}$, ...)
— aux applications linéaires ou multilinéaires...

I — Limite d'une fonction vectorielle

1) Définitions et caractérisation séquentielle

Définitions : limite d'une fonction vectorielle lorsque x tend vers a : *(1)*

Soit $f : D \subset E \to F$, $a \in \overline{D}$ et $\ell \in F$. On suppose D non borné dans les définitions avec $\|x\| \to \infty$.

(1) : $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad tq\ \forall x \in D,\ (d_E(x,a) \leqslant \delta \Rightarrow d_F(f(x),\ell) \leqslant \varepsilon)$.

(2) : $\|f(x)\| \underset{x\to a}{\longrightarrow} \infty \iff \forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0 \quad tq\ \forall x \in D, (d_E(x,a) \leqslant \delta \Rightarrow \|f(x)\|_F \geqslant M)$.

(3) : $f(x) \underset{\|x\|\to\infty}{\longrightarrow} \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \quad \exists M \in \mathbb{R}\ tq\ \forall x \in D,\ (\|x\|_E \geqslant M \Rightarrow d_F(f(x),\ell) \leqslant \varepsilon)$.

(4) : $\|f(x)\| \underset{\|x\|\to\infty}{\longrightarrow} \infty \iff \forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{R}\ tq\ \forall x \in D,\ (\|x\|_E \geqslant N \Rightarrow \|f(x)\|_F \geqslant M)$.

(5) : ***Définition générique :***

pour tout voisinage V de ℓ, l'image réciproque $\overset{-1}{f}(V) = \{x \in E | f(x) \in V\}$ est un voisinage relatif de a.

(6) : *Cas particulier : extension aux limite à droite et/ou limite à gauche quand $D \subset \mathbb{R}$.*

Théorème : caractérisation séquentielle *(2)*

(1) : $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \iff$ *pour toute suite $(x_n) \in D^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$, on a $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$.*

(2) : $f(x) \underset{x\to a}{\not\longrightarrow} \ell \iff \exists \varepsilon > 0$ *et $(x_n) \in D^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ et $d(f(x_n),\ell) \geqslant \varepsilon$.*

(3) : $\|f(x)\| \underset{x\to a}{\not\longrightarrow} \infty \iff \exists (x_n) \in D^{\mathbb{N}}$ *telle que $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ et $(f(x_n))$ est bornée.*

2) Propriétés

Propriétés *(3)*

(1) : *Si f admet une limite, alors cette limite est **unique**. On la note $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_a f$.*

(2) : *Si $a \in D$ et $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$ alors $\ell = f(a)$: on dit que f est continue en a.*

(3) : *Si f a une limite finie en a alors il existe un voisinage relatif de a sur lequel f est bornée.*

Opérations sur les limites *(4)*

(1) : *La limite d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des limites.*

(2) : *Si $(F,+,\times,.)$ est une algèbre normée, la limite d'un produit est le produit des limites,*

(3) : **Limite d'une composée :** *soit $f : D \to F$, $g : D' \to G$ avec $f(D) \subset D'$. Soit $a \in \overline{D}$.*
Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} b$ et $g(y) \underset{y\to b}{\longrightarrow} \ell$, alors $g \circ f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$

(4) : *En particulier, si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$, alors $\|f(x)\| \underset{x\to a}{\longrightarrow} \|\ell\|$.*

Normes équivalentes *(5)*

(1) : *La notion de limite est inchangée si on remplace les normes de E et F par des normes équivalentes.*
(2) : *Lorsque E et F sont de dimensions finies, cette notion est intrinsèque.*

Exemples *(6)*

Étudier les limites en $(0,0)$ des fonctions suivantes :
(1) : $f_1(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$
(2) : $f_2(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$
Attention : *pour étudier* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, *il NE SUFFIT PAS d'étudier* $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)$...

Applications coordonnées en dimension finie *(7)*

Si F est de dimension finie, en notant $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots f_n(x))$ dans une base $(e_1, e_2 \dots, e_n)$ de F, il y a équivalence entre :
(1) : *la fonction vectorielle f converge en a*
(2) : *les fonctions coordonnées $f_i : E \to \mathbb{K}$ convergent en a*
Et dans ce cas, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \left(\lim\limits_{x\to a} f_1(a), \lim\limits_{x\to a} f_2(a) \dots \lim\limits_{x\to a} f_n(a)\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lim\limits_{x\to a} f_i(a)\cdot e_i$
En particulier, une fonction à valeurs complexes $f : D \to \mathbb{C}$ converge en $a \in D$ $\Leftrightarrow$ Re(f) et Im(f) convergent en a et alors $\lim\limits_a(f) = \lim\limits_a(Re\ f) + \lim\limits_a(Im\ f)$.

Généralisation au cas F est un espace produit : *(8)*

Si $F = F_1 \times F_2 \times \dots F_n$, en notant $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots f_n(x))$ avec $f_i(x) \in F_i$, il y a équivalence entre :
(1) : *la fonction vectorielle f converge en a*
(2) : *les fonctions vectorielles $f_i : E \to F_i$ convergent en a*
Et dans ce cas, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \left(\lim\limits_{x\to a} f_1(a), \lim\limits_{x\to a} f_2(a) \dots \lim\limits_{x\to a} f_n(a)\right)$.

3) Comparaisons de fonctions

Comparaison asymptotique *(9)*

Soient f et g des fonctions vectorielles et ϕ une fonction réelle.
On dit que f est négligeable devant ϕ au voisinage de a lorsque :
(1) : $f(x) = o(\phi(x)) \iff \forall\, \varepsilon > 0 \ \ , \exists\, \delta > 0$ *tel que* $\forall\, x \in D,\ d(x,a) \leqslant \delta \Rightarrow \|f(x)\| \leqslant \phi(x)$ *(ϕ positive).*
On dit que f est dominée devant ϕ au voisinage de a lorsque :
(2) : $f(x) = O(\phi(x)) \iff \exists\, M \in \mathbb{R}, \exists\, \delta > 0$ *tel que* $\forall\, x \in D,\ d(x,a) \leqslant \delta \Rightarrow \|f(x)\| \leqslant M\phi(x)$ *(ϕ positive).*
On dit que f et g sont équivalentes au voisinage de a lorsque :
(3) : $f(x) \sim g(x) \iff f(x) - g(x) = o(\|g(x)\|)$ *(c'est une relation d'équivalence).*

Caractérisations / Propriétés *(10)*

Si ϕ est à valeurs strictement positives :
(1) : $f(x) = o(\phi(x)) \iff f(x)/\phi(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$.
(2) : $f(x) = O(\phi(x)) \iff (f(x)/\phi(x))$ *est bornée.*
(3) : $f(x) \sim \phi(x) \iff f(x)/\phi(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.
Dans ce dernier cas de l'équivalence, f est réelle et $f(x) > 0$ pour tout x proche de a.

(4) : $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \iff f(x) - \ell = o(1)$.
(5) : *En particulier,* $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0 \iff f(x) = o(1)$.
(6) : *f est bornée au voisinage de a* $\iff f(x) = O(1)$.

Théorème/Méthode *(11)*

L'équivalence entre fonctions à valeurs réelles est compatible avec la multiplication, la division et l'élévation à une puissance constante. Pour toute autre opération entre fonctions équivalentes, écrire $f(x) = g(x) + o(\|g(x)\|)$, substituer et simplifier.

Exercice 1 : Rappels de techniques de MPSI :

(1) : *Déterminer les limites suivantes, lorsque celles-ci existent :*

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$	**3.** $\lim_{x\to 0+} x^x$	**5.** $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$
2. $\lim_{x\to +\infty}\frac{x-\sqrt{x}}{\ln x+x}$	**4.** $\lim_{x\to 1+}\ln x.\ln(\ln x)$	**6.** $\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\arccos x}$

(2) : *Montrer que toute fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ périodique convergeant en $+\infty$ est constante.*

II — Continuité et continuité uniforme.

1) Continuité

Définitions *(12)*

Soit f une fonction définie en a.
(1) : ***Définition locale :*** *f est continue en $a \Longleftrightarrow f(x)\underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a) \Longleftrightarrow f$ a une limite en a*
(dans ce cas, cette limite ne peut être que $f(a)$...).
(2) : ***Définition globale :*** *f est continue sur $D \Longleftrightarrow \forall a\in D,\ f(x)\underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a)$.* ***Notation :*** *$\mathcal{C}(D,F)$.*

Caractérisation séquentielle de la continuité locale en a : *(13)*

$f:D\to F$ est continue en $a\in D \Leftrightarrow \forall (x_n)_{\mathbb{N}}\in D^{\mathbb{N}}, \left(x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a \Rightarrow f(x_n)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(a)\right)$

Propriétés *(14)*

(1) : *La combinaison linéaire de fonctions continues est une fonction continue.*
(2) : *La composée d'une fonction continue est une fonction continue.*
(3) : *Si F est une algèbre,le produit de fonctions continues est une fonction continue.*
(4) : *Si F est un corps, le quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas est une fonction continue.*
(5) : ***Continuité des applications coordonnées :***
Si F est de dimension finie, alors $f:D\to F$ est continue si et seulement si toutes ses fonctions coordonnées dans une base de F le sont.
(6) : **Généralisation :** *Si $F=F_1\times F_2\times\ldots\times F_n$ est un espace produit, alors $f:D\to F$ est continue si et seulement si toutes ses fonctions coordonnées à valeurs dans chaque F_i le sont.*

Exemples *(15)*

Pour E quelconque :
- *les fonctions constantes sont continues.*
- *la fonction $Id_E:(E,\|\ \|_E)\to(E,\|\ \|_E)$ est continue.*
- *la fonction $Id_E:(E,N_1)\to(E,N_2)$ est continue $\Leftrightarrow N_1$ est une norme plus fine que N_2.*
- *la fonction $\|\ \|_E:(E,\|\ \|_E)\to(\mathbb{R},|.|)$ est continue.*
- *toute fonction lipschitzienne est continue.*
- *la fonction $d_A: x\mapsto d(x,A)$ est continue.*

Pour E de dimension finie : dans toute base :
- *les fonctions coordonnées sont continues,*
- *toute fonction polynomiale en les coordonnées est continue,*
- *les fonctions rationnelles en les coordonnées sont continues,*
- *la transposition, la trace dans $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ sont des fonctions continues,*
- *la multiplication, le déterminant dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont des fonctions continues*
- *la fonction $A\mapsto A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}{}^t com(A)$ est continue sur $GL_n(\mathbb{K})$ comme fraction rationnelle en les coefficients de A.*

Densité et continuité : prolongement des inégalités *(16)*

(1) : *Si $f:D\to\mathbb{R}$ est continue sur D et positive ou nulle sur une partie dense dans D alors f est positive ou nulle sur D. Contre-exemple avec strictement positive .*
(2) : *Si $f:D\to F$ est continue sur D et nulle sur une partie dense dans D alors f est nulle sur D.*

Exercice 2 : Classique

Soit f continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y)$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(1) \cdot x$.

Caractérisation : continuité globale et images réciproques d'ouverts ou de fermés *(17)*

Soit $f : D \to F$.
(1) : *la fonction f est continue sur D $\Leftrightarrow$ l'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert relatif de D*
(2) : *la fonction f est continue sur D $\Leftrightarrow$ l'image réciproque par f de tout fermé de F est un fermé relatif de D.*

Applications : *(18)*

(1) : *pour $f : E \to \mathbb{R}$ continue, l'ensemble $\{x \text{ tel que } f(x) > 0\}$ est ouvert et $\{x \text{ tel que } f(x) \geqslant 0\}$ est fermé.*
(2) : *En particulier, $GL_n(\mathbb{K}) = \{M : |\det(M)| > 0\}$ est ouvert et $O_n(\mathbb{R}) = \{M : \|{}^tMM - I_n\| \leqslant 0\}$ est fermé. Étant borné en dimension finie, il est donc compact.*

Remarque *(19)*

Ne pas confondre image réciproque et image directe.
On dit que f est ouverte si l'image directe de tout ouvert de E est un ouvert de F.
La fonction $f_1 : x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est ouverte de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Z}$, mais n'est pas continue.
La fonction $f_2 : x \mapsto x^2$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mais n'est pas ouverte.

2) Prolongement par continuité

Définition *(20)*

(1) : *Si f converge vers $\ell \in F$ en $a \in \overline{A} \setminus A$, alors l'application $\tilde{f} : A \cup \{a\} \to F$ telle que $\tilde{f}(x) = f(x)$ si $x \in A$ et $\tilde{f}(a) = \ell$ est continue en a et s'appelle prolongement de f par continuité en a.*
(2) : *Par unicité de la limite, ce prolongement est unique.*
On parle donc **du** *prolongement de f par continuité en a*

Remarques : *(21)*

(1) : ***Attention :*** *une fonction continue sur $]a,b)$ n'admet pas toujours un prolongement continu sur $[a,b)$.* ***C-ex :*** *$x \mapsto \sin(1/x)$ sur $]0,+\infty[$.*
(2) : **Culture :** *si f est uniformément continue sur A à valeurs dans $\mathbb{K}$, alors f admet un unique prolongement par continuité sur $\overline{A}$ (et ce prolongement par continuité est uniformément continu)*

3) Continuité des applications linéaires et bilinéaires

Théorème *(22)*

Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$, il y a équivalence entre :
(1) : *f est continue*
(2) : *la restriction de f à $\overline{B}(0,1)$ est bornée*
(3) : *il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in E$, $\|f(x)\| \leqslant k\|x\|$.*

Si f bilinéaire : $E_1 \times E_2 \to F$, il y a équivalence entre :
(4) : *f est continue*
(5) : *la restriction de f à $\overline{B}_1(0,1) \times \overline{B}_2(0,1)$ est bornée*
(6) : *il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que :*
$\forall (x,y) \in E_1 \times E_2$, $\|f(x,y)\| \leqslant k\|x\|\|y\|$.

Notation : *(23)*

On note $\mathcal{L}_c(E,F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F.

Dimension finie et continuité *(24)*

(1) : *Toute application linéaire dont l'espace de départ est de dimension finie est continue.*
(2) : *Toute application bilinéaire dont les espaces de départ sont de dimensions finies est continue.*

Exercice 3 : Exemples et contre-exemples en dimension infinie

Déterminer si les applications linéaires ou bilinéaires suivantes sont continues :
(1) : $e_\infty : (\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \| \|_\infty) \to (\mathbb{R}, |.|)$ *telle que* $e_\infty : f \mapsto f(0)$.
(2) : $e_1 : (\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \| \|_1) \to (\mathbb{R}, |.|)$ *telle que* $e_1 : f \mapsto f(0)$.
(3) : $p_\infty : (\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \| \|_\infty)^2 \to (\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \| \|_\infty)$ *telle que* $p_\infty : (f,g) \mapsto f \cdot g$.
(4) : $p_1 : (\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \| \|_1)^2 \to (\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \| \|_1)$ *telle que* $p_1 : (f,g) \mapsto f \cdot g$.
(5) : $\delta : \mathcal{C}^\infty([0,1],\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty([0,1],\mathbb{R})$ *telle que* $\delta(f) = f'$ *(peu importe la norme)*
- on pourra remarquer que toute fonction linéaire continue doit avoir un spectre borné -
(6) : *La dérivation dans* $(\mathbb{K}[X], \| \|)$ *avec* $\|P\| = |P(0)| + |P'(0)| + |P''(0)| + \dots$
(7) : *La dérivation dans* $(\mathbb{K}[X], \| \|_\infty)$ *avec* $\|P\|_\infty = \sup_{[-1,1]|P|}$
(8) : *Montrer la continuité des fonctions coordonnées dans la base canonique de* $\mathbb{K}[X]$ *et la discontinuité des fonctions coordonnées dans la base* $(X^k/k^k)_{k\in\mathbb{N}}$ *pour la norme précédente.*

Exercice 4 :

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. *Montrer par contraposition que si pour toute suite* (u_n) *convergeant vers* 0_E, *la suite* $(f(u_n))$ *est bornée, alors la fonction* f *est continue.*

III — Continuité sur un compact

1) Généralisation du théorème de l'image continue d'un segment :

Théorème : image continue d'un compact *(25)*

Soit K *compact et* $f : K \longrightarrow F$ *continue. On a :*
(1) : *l'ensemble image* $f(K)$ *est compact.*
(2) : *si* $F = \mathbb{R}$, f *est bornée et atteint ses bornes.*
En particulier, si f *est continue sur le compact* K *et strictement positive, alors il existe une constante* m *telle que* $0 < m \leqslant f$.

Exercice 5 : Ouvert

Soit $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ *muni de la norme de la convergence uniforme.*
(1) : *Montrer que l'ensemble* $O = \{f \in E | \forall x \in [a,b], f(x) > 0\}$ *est un ouvert de* E.
Le résultat demeure-t-il si on remplace $[a,b]$ *par* $\mathbb{R}$ *?*
(2) : *L'ensemble des fonctions strictement croissantes sur* $[a,b]$ *est-il un ouvert de* E *?*

Exercice 6 : Enveloppe convexe

Soit $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$ *une famille finie d'éléments de* E. *L'enveloppe convexe de la famille* $\mathcal{F}$ *est par définition l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de* $x_1, \dots, x_n$, *c'est à dire les combinaisons linéaires* $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ *avec* $\forall i, \lambda_i \geqslant 0$ *et* $\sum_i \lambda_i = 1$.
(1) : *Justifier que* $K = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n | \sum_i \lambda_i = 1\}$ *est un compact.*
(2) : *En déduire que l'enveloppe convexe d'une famille finie de points est un compact de* E.

Exercice 7 : Fonction réciproque :

Soient K *compact et* $f : K \to D$ *continue injective. Montrer que la fonction réciproque est continue sur* $f(K)$.

2) Continuité uniforme.

a) Rappels.

Définition *(26)*

Soient E *et* F *deux espaces normés et* $f : E \to F$ *une application.* f *est dite uniformément continue sur* E *ssi :*
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x,y) \in E \times E, (\|x-y\|_E \leqslant \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_F \leqslant \varepsilon).$$

Exemples *(27)*

- *Une fonction k-lipschitzienne est uniformément continue. Exemple : la fonction norme* $\| \ \|_E : x \mapsto \|x\|_E$.
- *Toute fonction dérivable de* $I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *à dérivée bornée est uniformément continue (TAF).*
- *La fonction* $x \mapsto x^2$ *est uniformément continue sur tout* **segment** $[a, b]$, *mais pas sur* $\mathbb{R}$.
- *La fonction racine est uniformément continue sur* $\mathbb{R}_+$ *car* $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2, |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leqslant \sqrt{|x-y|}$.
- *Plus généralement, on dit que* f *est* α*-höldérienne pour* $0 < \alpha \leqslant 1$ *ssi*

$$\exists \alpha, C \in]0,1] \times \mathbb{R}_+^*, \forall (x,y) \in E \times E, (\|f(x) - f(y)\|_F \leqslant C\|x-y\|_E^\alpha)$$

Toute fonction α*-höldérienne pour* $0 < \alpha \leqslant 1$ *est uniformément continue.*

Exercice 8 : Complément : caractérisation séquentielle de l'uniforme continuité

(1) : *Montrer que l'application* $f : D \to F$ *est uniformément continue sur* D *ssi*

$$\forall ((x_n)_\mathbb{N}, (y_n)_\mathbb{N}) \in D^\mathbb{N} \times D^\mathbb{N}, \left(y_n - x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow f(y_n) - f(x_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \right).$$

(2) : *Montrer que les fonctions* $f_1 : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$, $f_2 : x \in \mathbb{R}+^* \mapsto 1/x$ *et* $f_3 : x \in]0,1] \mapsto \sin(1/x)$ *ne sont pas uniformément continues.*

(3) : *Montrer que si* f *est dérivable sur* $\mathbb{R}_+$ *et si* $|f'| \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, *alors* f *n'est pas uniformément continue.*

b) Généralisation du théorème de Heine vu en MPSI :

Théorème de Heine : *(28)*

Si $f : K \to F$ *est une fonction continue sur un compact* K, *alors* f *est uniformément continue sur* K .

Corollaire 1 *(29)*

Densité des fonctions en escaliers :

Soit $f : [a, b] \to F$ *continue. Il existe une suite* (f_n) *de fonctions en escalier telle que* $\|f_n - f\|_\infty \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$.

Cela permet entre autre de définir l'intégrale d'une fonction (vectorielle) continue sur un segment.

c) Théorème d'approximation de Weierstrass

Corollaire 2 : théorème de Weierstrass *(30)*

Densité des fonctions polynômes :

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continue. Il existe une suite* (P_n) *de fonctions polynomiales telle que* $\|P_n - f\|_\infty \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 9 : Théorème des moments

Soit f *continue sur* $[0, 1]$ *telle que* $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\int_0^1 f(x) x^n \, \mathrm{d}x = 0$. *Montrer que* f *est nulle.*

IV — Convexité, connexité

1) Ensembles convexes

a) Barycentres

Définition *(31)*

(1) : *Soit* $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p} \in E^p$ *et* $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant p} \in \mathbb{R}^p$ *tels que* $\sum_{i=1}^p \lambda_i \neq 0$.
On appelle ***barycentre*** *des points pondérés* (x_i, λ_i) *l'élément :*

$$\frac{1}{\sum_i \lambda_i} \cdot \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i.$$

(2) : *En divisant tous les poids par une constante non nulle, on ne modifie pas le barycentre. Dans toute la suite, on supposera donc* $\sum \lambda_i = 1$.
(3) : ***Associativité :*** *soit* $(x_i, \lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ *et* $(y_j, \lambda_j)_{1\leqslant j\leqslant q}$ *deux familles de points pondérés telles que* $s_1 = \sum_i \lambda_i \neq 0$, $s_2 = \sum_j \mu_j \neq 0$ *et* $s_1 + s_2 \neq 0$.
Alors le barycentre des points pondérés $((x_1, \lambda_1), \dots (x_p, \lambda_p), (y_1, \mu_1), \dots (y_q, \mu_q))$ *est le barycentre des barycentres partiels* (b_1, s_1) *et* (b_2, s_2).

Barycentres à coefficients positifs - ensembles convexes *(32)*

(1) : *Étant donnés deux vecteurs* x_1 *et* x_2, *on note* $[x_1, x_2]$ *l'ensemble des barycentres à coefficients positifs des points* x_1 *et* x_2. *Il s'agit des vecteurs* $u = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ *avec* λ ***positif !***
(2) : *Cette définition se généralise dans le cas d'une famille de n éléments. Par exemple, l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de trois points* A, B *et* C *d'un espace affine est constitué de l'intérieur géométrique du triangle.*
(3) : *Un ensemble convexe est un ensemble contenant ses barycentres à coefficients positifs.*
(4) : *Il suffit qu'il contienne les barycentres à coefficients positifs de tout couple de points.*

Exemples : *(33)*

(1) : *boule, sous-espace affine, demi-espace affine dans un* $\mathbb{R}$*-ev,*
(2) : *triangle dans un plan, polygones convexes (barycentres à coefficients positifs d'un nombre fini de points)*
(3) : *épigraphe d'une fonction* f *dérivable deux fois sur* I *telle que* $f'' \geqslant 0$ *(par exemple la fonction carrée ou la fonction exponentielle.*

b) Propriétés et enveloppe convexe

Théorème *(34)*

(1) : *Les parties convexes de* $\mathbb{R}$ *sont les intervalles.*
(2) : *L'intersection d'une famille de convexes est convexe.*
(3) : *L'intersection de toutes les parties convexes contenant une partie* X *est le plus petit convexe contenant* X, *noté* $Conv(X)$ *appelée enveloppe convexe de* X.
(4) : $Conv(X)$ *est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs des éléments de* X.

Exercice 10 : Intérieur et adhérence d'un convexe

(1) : *Si* A *est convexe alors* $\overline{A}$ *et* $\mathring{A}$ *le sont aussi.*

c) Fonctions convexes

Définition : fonction convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ *(35)*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. *On dit que* f *est convexe sur* I *si :*

$$\forall (x_1, x_2) \in I^2, \forall \lambda \in [0,1], f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

L'épigraphe d'une fonction convexe est un convexe.
On dit que f *est concave si et seulement si* $-f$ *est convexe.*

Exercice 11 : Somme et produit de fonctions convexes

Soient f *et* g *deux fonctions convexes sur* I. *Montrer que* $f+g$ *est une fonction convexe, mais que* $f \cdot g$ *ne l'est pas nécessairement.*

2) Connexité par arcs

a) Définition, exemples

Composantes connexes *(36)*

(1) : *Deux éléments $a, b \in A \subset E$ sont joignables par un arc (ou chemin) dans A s'il existe $\varphi : [\alpha, \beta] \to A$ continue telle que $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$.*
(2) : *Il s'agit d'une relation d'équivalence (réflexive, symétrique et transitive) sur les éléments de A.*
(3) : *La composante connexe par arcs de a dans A est l'ensemble des points b joignables à a par un arc dans A.*
(4) : *La famille des composantes connexes par arcs de A forme une partition de A.*
(5) : *A est connexe par arcs si cette famille est réduite à une seule composante, c'est à dire que deux éléments quelconques de A sont toujours reliés par un chemin dans A.*

Exemples *(37)*

(1) : *Un ensemble convexe est connexe par arcs.*
(2) : *Un ensemble étoilé (= réunion de segments issus d'un même point) est connexe par arcs.*
[Exemple : l'ensemble des matrices nilpotentes est un ensemble étoilé.]
(3) : *$\mathbb{Q}$ est totalement discontinu (= chaque composante connexe par arcs est réduite à un point).*
(4) : *Si E est un espace vectoriel de dimension supérieure ou égale à 2, l'ensemble $E \setminus \{0\}$ est connexe par arcs.*
(5) : *Plus généralement, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou si $\dim(E) \neq 1$ et A est une partie convexe bornée de E alors $E \setminus A$ est connexe par arcs.*

b) Convexité, connexité, continuité

Théorème *(38)*

Pour $A \subset \mathbb{R}$: A est connexe par arcs $\Longleftrightarrow$ A est convexe $\Longleftrightarrow$ A est un intervalle.

Théorème : image continue d'un connexe par arcs *(voir TVI)* *(39)*

(1) : *L'image d'un connexe par arcs par une fonction continue est connexe par arcs.*
(2) : *L'image d'un connexe par arcs par une fonction continue à valeurs réelles est un intervalle.*

Exercice 12 : Sphère unité en dimension $\geqslant 2$

Soit E un espace vectoriel normé réel de dimension (éventuellement infinie) supérieure ou égale à 2.
(1) : *Justifier que $\phi : x \mapsto \dfrac{x}{||x||}$ est continue sur $E \setminus \{0\}$.*
(2) : *En déduire que la sphère unité est connexe par arcs.*

Exercice 13 : Ensembles non homéomorphes

(1) : *Montrer qu'il n'existe pas de bijection continue de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$.*
(2) : *Montrer qu'il n'existe pas de bijection continue de $\mathbb{U}$ dans $[0, 1]$.*

Exercice 14 :

Soient $g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue et $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon $R > 0$.

1. *Montrer qu'il existe deux points A et B de $\mathcal{C}$ diamétralement opposés tels que $g(A) = g(B)$.*

2. *Montrer qu'il existe deux points C et D de $\mathcal{C}$, se déduisant l'un de l'autre par un quart de tour tels que $g(C) = g(D)$.*

Exercice 15 : $GL_n(\mathbb{K})$

(1) : *Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*
(2) : *Montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.*

V — Travaux dirigés

Exercice 16 : PSI E3A 2004

Dans tout le problème, $\mathbb{R}$ désigne le corps des réels, E l'espace vectoriel des fonctions continues, définies sur $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, F l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, définies sur $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Pour tout $f \in E$, on note $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$ et on rappelle que l'on définit ainsi une norme sur E.
Si g est une application k fois dérivable sur $[0,1]$, $g^{(k)}$ désigne la dérivée k-ième de g.
On définit l'application T qui à $f \in E$ associe l'application $T(f)$, définie sur $[0,1]$ par :

$$\forall x \in [0,1]\,, T(f)(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $T^n = T \circ T^{n-1}$, sachant que $T^0 = I_E$ (application identité de E).
Lorsque U est un endomorphisme continu de E, on désigne par $|||U|||$ le réel positif :

$$|||U||| = \sup_{\|f\|_\infty \leqslant 1} \|U(f)\|_\infty.$$

Question 0.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et u une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[0,1]$ telle que : $\forall k \in \{0,\dots,n-1\}\,, u^{(k)}(0) = 0$.

1. *Prouver que : $\forall x \in [0,1]\,, u(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} u^{(n)}(t)dt$.*

Question 1.

1. *Montrer que T est un endomorphisme de E. Préciser $\mathrm{Ker}(T)$ et $\mathrm{Im}(T)$. Quel est le spectre de T ?*

Question 2.

1. *Montrer que $\forall x \in [0,1]\,, |T(f)(x)| \leqslant \|f\|_\infty$.*
   En déduire que T est une application continue de $(E, \|\ \|_\infty)$ dans $(E, \|\ \|_\infty)$.
2. *Prouver que $|||T||| \leqslant 1$.*
3. *On considère $f_0 : x \in [0,1] \mapsto f_0(x) = 1$. Que vaut $\|T(f_0)\|_\infty$? En déduire $|||T|||$.*

Question 3.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. *Montrer que $T^n(f)$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[0,1]$.*
   Prouver que pour tout entier naturel $k \in \{0,\dots,n-1\}$, $(T^n(f))^{(k)} = T^{n-k}(f)$.
   Que vaut $(T^n(f))^{(n)}$? $(T^n(f))^{(k)}(0)$ pour $k \in \{0,\dots,n-1\}$?
2. *Montrer alors que : $\forall x \in [0,1]\,, (T^n(f))(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)dt$.*
3. *Préciser $\mathrm{Ker}(T^n)$ et $\mathrm{Im}(T^n)$.*
4. *Prouver que T^n est un endomorphisme continu de $(E, \|\ \|_\infty)$.*
5. *En utilisant la fonction f_0 définie à la question 2., déterminer $|||T^n|||$.*
6. *Préciser $\lim\limits_{n\to+\infty} T^n$.*
7. *Prouver que $\forall f \in E$, $\forall x \in [0,1]$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} (T^n(f))(x)$ converge absolument.*

On note H l'application qui a $f \in E$ associe l'application $H(f)$ définie sur $[0,1]$ par :

$$\forall x \in [0,1]\,, H(f)(x) = \int_0^x e^{x-t} f(t)dt.$$

Question 4.

1. *Montrer que H est un endomorphisme de E.*
2. *Prouver que : $\exists K \geqslant 0$ tel que $\forall x \in [0,1]$, $|H(f)(x)| \leqslant K\,\|f\|_\infty$.*
   En déduire que H est continue de $(E, \|\ \|_\infty)$ dans $(E, \|\ \|_\infty)$ et que $|||H||| \leqslant e$.
3. *Montrer que $H(f)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Calculer, pour $x \in [0,1]$, $(H(f))'(x)$.*

Exercice 17 : E3A MP - 2010

L'espace $E = \mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire usuel : $\forall (X,Y) \in E^2, < X, Y >= {}^tXY$, et $\| X \|^2 = <X,X>$. L'espace E est orienté et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base orthonormale directe de E. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ représenté dans la base $\mathcal{B}$ par la matrice :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *Vérifier que A est une matrice orthogonale et montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.*

2. *On rappelle que si w est un endomorphisme continu de E, ($w \in \mathcal{L}_C(E)$), la norme de l'endomorphisme w est définie par :*

$$||| w |||= \sup_{\|X\|=1} \| w(X) \|$$

a. *Vérifier que u est un endomorphisme continu de E et que : $||| u |||= 1$.*

b. *Soit $w \in \mathcal{L}_C(E)$. Prouver qu'il existe $X_0 \in E$ tel que $\| X_0 \|= 1$ et $||| w |||=\| w(X_0) \|$.*

3. *On définit dans $\mathcal{L}_C(E)$ la suite (u^k) des endomorphismes itérés de u.*
Prouver que la suite (u^k) est une suite bornée de $\mathcal{L}_C(E)$.

4. *Soit v l'endomorphisme de E défini par : $v = id_E - u$.*

a. *Vérifier que $\mathrm{Ker}(v) = Vect(1,0,1)$ puis que $\mathrm{Ker}(v)$ et $\mathrm{Im}(v)$ sont orthogonaux et $E = \mathrm{Ker}(v) \oplus \mathrm{Im}(v)$.*

b. *En déduire que, $\forall X \in E, \exists Z \in E, \exists! X_1 \in \mathrm{Ker}(v), X = X_1 + Z - u(Z)$.*

c. *On pose pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $p_m = \dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} u^k$. Montrer que pour tout $X \in E$, la suite $(p_m(X))$ converge vers la projection de X sur $\mathrm{Ker}(v)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(v)$.*

Généralisation :

On prend dans cette partie $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel : $\forall (X,Y) \in E^2, < X, Y >= {}^tXY$, la norme d'un vecteur quelconque X de E étant notée $\| X \|$ et soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E.
Pour toute matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui représente dans la base $\mathcal{B}$ un endomorphisme u de E, on note $||| A |||= \sup\limits_{\|X\|=1} \| AX \|$.

1. *Vérifier que $||| \; |||$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

2. *Quelques propriétés de la matrice $B = {}^tAA$.*

a. *Montrer que B est une matrice symétrique réelle.*

b. *On admet qu'il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPBP$ soit diagonale réelle. Montrer alors que les valeurs propres de B sont positives ou nulles. Étudier le cas où $A \in GL_n(\mathbb{R})$.*

c. *On note $\rho(B) = \sup\{| \lambda |, \lambda \in Sp(B)\}$ où $Sp(B)$ désigne l'ensemble des valeurs propres de la matrice B. Soit U une matrice semblable à B. A-t-on $\rho(U) = \rho(B)$?*

d. *Montrer que $||| A |||^2 \leqslant \rho(B)$ puis que $||| A |||^2 = \rho(B)$.*

3. *On suppose dans cette question que u est une homothétie de rapport $\gamma \neq 0$.*

a. *Calculer $||| A |||$. Dans quel cas la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est-elle bornée ?*

b. *On suppose que $| \gamma |< 1$ et on pose pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $P_m = \dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} A^k$.*
Expliciter pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, P_m puis déterminer $\lim\limits_{m\to+\infty} P_m$.

4. *On suppose dans cette question que u est un endomorphisme symétrique de E (donc diagonalisable) et on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de u, les λ_i étant distincts ou non.*

a. *Calculer $||| A |||$.*

b. *Dans quel cas la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est-elle bornée ?*

c. *On suppose que : $\forall i \in \{1, \ldots, n\}, | \lambda_i |< 1$ et on pose pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $P_m = \dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} A^k$.*
Calculer $\lim\limits_{m\to+\infty} P_m$.

Limites :

Exercice 18 : Limites vectorielles

Étudier les limites en $(0,0)$ des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$
2. $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x-y}$
3. $f(x,y) = \frac{\tan x^2 y}{x^2+y^2}$
4. $f(x,y) = \frac{\sin x^2y^2}{x^2+y^2}$
5. $f(x,y) = \frac{1-\cos(xy)}{xy^2}$
6. $f(x,y) = x^y = \mathrm{e}^{y\ln x}$
7. $f(x,y) = \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y}{x+y}$
8. $f(x,y) = \frac{\sin x - \operatorname{sh} y}{\operatorname{sh} x - \sin y}$

Attention : *pour étudier* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$*, il NE SUFFIT PAS d'étudier* $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)$*...*

Exercice 19 : Rappels de MPSI

(1) : *Rappeler le théorème du prolongement dérivable.*

(2) : *Soit* $f :]-1,0[\cup]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$.
Montrer que f peut être prolongée par continuité en 0 et que ce prolongement est alors dérivable en 0.
Quelle est alors la position relative de la courbe de f par rapport à sa tangente en ce point ?

(3) : *Soit* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$.
C'est ici un exemple de fonction non nulle dont tous les $DL_n(0)$ sont nuls.

Continuité et continuité uniforme :

Exercice 20 : Exemple et contre exemple

Soit $(E, \|\ \|)$ un evn et $a \in E\setminus\{0\}$.
Soit l'application $f : E\to\mathbb{R}$ telle que $f(x) = \|x-a\|$ si $\|x\| \leqslant \|a\|$ et $f(x) = 0$ si $\|x\| > \|a\|$
Montrer que f est continue en a mais que f n'est pas continue en $-a$.

Exercice 21 : Opérateurs linéaires

(1) : *Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $||.||_1$ de la convergence en moyenne. On pose $\varphi(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)dt$.*
Montrer que φ est continue.

(2) : *Soit ℓ^∞ l'ensemble des suites réelles bornées muni de la norme infinie $||u||_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}}|u_n|$. Soit Δ défini par $\Delta(u) = v$ où $v_n = u_{n+1} - u_n$. Montrer que Δ est linéaire et continu.*

Exercice 22 :

Soient $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$F(x,y) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{si } y \neq x \\ f'(x) & \text{si } y = x \end{cases}$$

Montrer que la fonction F est continue.

Exercice 23 : Fonctions U.C. et/ou lipschitzienne

(1) : *Montrer que la fonction $f : x\mapsto \ln(1+x)$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$. Est-elle uniformément continue ?*

(2) : *Montrer que la fonction racine carrée est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas lipshitzienne.*

Compacité

Exercice 24 : Somme, union :

(1) : *Montrer que la somme de deux compacts est un compact*
(2) : *Montrer que l'union de deux compacts est un compact.*
on donnera des démonstration dans le cas général d'un espace vectoriel de dimension quelconque.

Exercice 25 : Image d'un fermé par un polynôme

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ *et* F *un fermé de* $\mathbb{C}$. *Montrer que* $P(F)$ *est un fermé de* $\mathbb{C}$.

Exercice 26 : Ensemble des valeurs d'adhérence

Soit (u_n) *une suite à valeurs dans* E *un espace vectoriel de dimension finie.*
Soit A *l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite* (u_n).
Montrer que A *est un compact non vide de* E.

Connexité

Exercice 27 : Théorème de Darboux

Soit I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et* f *dérivable sur* I. *On veut montrer que* $f'(I)$ *est un intervalle.*
Posons $T = \{(x,y) \in I^2, y < x\}$ *et* $\varphi(x,y) = \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$ *pour tout* $(x,y) \in T$.
(1) : *Justifier que* φ *est bien définie et continue sur* T, *puis que* $\varphi(T) \subset f'(I) \subset \overline{\varphi(T)}$.
(2) : *Conclure.*

Exercice 28 :

(1) : *Montrer qu'il n'existe pas de fonction continue injective de* $\mathbb{U}$ *dans* $\mathbb{R}$.
(2) : *Soit* A *connexe par arcs et* $X \subset A$ *ouvert relatif et fermé relatif de* A. *Montrer qu'alors* $X = \emptyset$ *ou* $X = A$.

Exercice 29 : Connexité par arcs

Montrer que le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *formé des matrices diagonalisables est connexe par arcs.*
Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *n'est pas connexe par arcs.*
Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *est connexe par arcs.*
Montrer que $SO_2(\mathbb{R})$ *est une partie connexe par arcs.*

Exercice 30 : Continuité et connexité par arcs du graphe

Montrer que le graphe d'une fonction $f : I\,(\textit{intervalle}) \to \mathbb{R}$ *est connexe par arcs si et seulement si* f *est continue sur* I.

Divers :

Exercice 31 : Points fixes

Soit $f\colon [0\,;1] \to [0\,;1]$.

1. *On suppose que* f *est continue. Montrer que* f *admet un point fixe.*
2. *On suppose que* f *est croissante. Montrer que* f *admet un point fixe.*

Exercice 32 : Cesaro discret puis continu

1. *Rappeler le théorème de Cesàro et le démontrer.*
2. *Soit* $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *une fonction continue.*
   On suppose que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ *et on souhaite établir*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \ell$$

   a. *Pour* $\varepsilon > 0$, *justifier qu'il existe* $A \in \mathbb{R}_+$ *tel que pour tout* $x \geqslant A$

$$\left|\frac{1}{x}\int_A^x (f(t)-\ell)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon$$

   b. *Conclure en écrivant*

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \ell = \frac{1}{x}\int_0^A (f(t)-\ell)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{x}\int_A^x (f(t)-\ell)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 33 : Formes linéaires

(1) : *Soit* $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ *muni de la norme* $\|.\|_\infty$. *Soit* L *une forme linéaire sur* E *telle que si* $f \geqslant 0$, *alors* $L(f) \geqslant 0$.
Montrer que L *est continue.*
(2) : *Montrer qu'un hyperplan est soit fermé, soit dense.*
(3) : *Montrer qu'une forme linéaire* ϕ *est continue si et seulement si son noyau est fermé.*
(4) : *Soit* ϕ *une forme linéaire non nulle sur* E, *de noyau* H. *Montrer que* $E \setminus H$ *est connexe par arcs si et seulement si* ϕ *n'est pas continue.*

Exercice 34 : Point fixe et compact

(1) : *Soit* $f \in \mathcal{C}([a,b],[a,b])$. *Montrer qu'il existe* $c \in [a,b]$ *tel que* $f(c) = c$.
(2) : *Soit* $(E,\|.\|)$ *un espace vectoriel normé de dimension finie. Soit* $K \subset E$ *un compact non vide de* E *et* $f : K \to K$ *telle que :* $\forall (x,y) \in K^2, x \neq y \Rightarrow \|f(x)-f(y)\| < \|x-y\|$.
Montrer qu'il existe un unique $c \in K$ *tel que* $f(c) = c$.

Exercice 35 : Con- ? -exité

Soit A *une partie convexe non vide de* $\mathbb{R}^2$ *et* $f\colon A \to \mathbb{R}$ *une fonction continue.*
Soit a *et* b *deux points de* A *et* y *un réel tels que* $f(a) \leqslant y \leqslant f(b)$.
Montrer qu'il existe $x \in A$ *tel que* $f(x) = y$.

Exercice 36 :

Soient $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *continue et* $\mathcal{C}$ *un cercle de centre* O *et de rayon* $R > 0$.

1. *Montrer qu'il existe deux points* A *et* B *de* $\mathcal{C}$ *diamétralement opposés tels que* $g(A) = g(B)$.
2. *Montrer qu'il existe deux points* C *et* D *de* $\mathcal{C}$, *se déduisant l'un de l'autre par un quart de tour tels que* $g(C) = g(D)$.

Élements de correction pour E3A 2004 PSI :
Question 0.

1. C'est la formule de Taylor intégral : la preuve n'est sans doute pas nécessaire ici dans ce sujet, mais il est bon de la connaître : elle se démontre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ en utilisant une intégration par parties. On rappelle au passage que lors d'une intégration par parties, il faut mentionner (voire démontrer) que les deux fonctions sont de classe C^1.
   Plus précisément, l'initialisation de la récurrence est exactement l'énoncé du théorème fondamental de l'analyse, l'hérédité se fait en posant $f(t) = -\dfrac{(x-t)^n}{n!}$, $f'(t) = \dfrac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$ et $g(t) = u^{(n)}(t), g'(t) = u^{(n+1)}(t)$.
   Voir détails dans le cours de MPSI.

Question 1.

1. On vérifie par linéarité de l'intégrale que $T(f + \lambda g) = T(f) + \lambda T(g)$. De plus, si f est continue sur $[0,1]$, $T(f)$ est la primitive de f qui s'annule en 0. D'après le théorème fondamental de l'analyse, $T(f)$ est donc continue. Donc T est bien linéaire de E dans E.
   Une fonction f est dans $Ker(T)$ ssi $T(f)$ (qui est la primitive de f qui s'annule en 0) est nulle. Or $f = (T(f))'$ est la dérivée de la fonction nulle : c'est donc la fonction nulle. Donc $Ker(T) = \{0\}$.
   Une fonction $g \in Im(T)$ ssi il existe $f \in E$ telle que $T(f) = g$. Donc g est une primitive qui s'annule en 0. C'est donc d'après le théorème fondamental de l'analyse une fonction de classe C^1 qui s'annule en 0.
   Réciproquement si g est une fonction de classe C^1 qui s'annule en 0, toujours d'après le théorème fondamental de l'analyse, $g = \int_0^x g'(t)dt = T(g')$.
   Finalement, $Im(T) = \{$des fonction de classe C^1 qui s'annulent en 0.$\}$.
   Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in E$ tels que $T(f) = \lambda f$, c'est à dire en posant $F = T(f)$: $F = \lambda F'$. Alors $F(t) = C \cdot \exp(\lambda t)$. Mais il faut aussi $F(0) = 0$, donc $F = 0$ et finalement $f = 0$. Donc λ n'est pas valeur propre. Finalement, $Sp(T) = \emptyset$.

Question 2.

1. $\forall x \in [0,1],\ |T(f)(x)| = |\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \ \leqslant \int_0^x |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant x.\|f\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$ car $x \leqslant 1$.
   Donc $\forall x \in [0,1],\ |T(f)(x)| \leqslant \|f\|_\infty$.
   En passant au sup, $\|T(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$ et T est linéaire $\Rightarrow$ T est 1-lipschitzienne donc continue de $(E, \|.\|_\infty)$ dans lui-même.
2. $\forall f \in E,\ \|T(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \Rightarrow \Big[\forall f \in E,\ \text{si } \|f\|_\infty \leqslant 1,\ \text{alors } \|T(f)\|_\infty \leqslant 1\Big]$. Donc en passant au sup, $|||T||| \leqslant 1$
3. $\forall x \in [0,1],\ T(f_0)(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{d}t = x \Rightarrow \|T(f_0)\|_\infty = 1$.
4. $\|f_0\|_\infty = 1$ et $\|T(f_0)\|_\infty = 1 \Rightarrow |||T||| \geqslant 1$, or $|||T||| \leqslant 1$, d'où, par double inégalité, $|||T||| = 1$.

Question 3.

1. $T^n(f)$ est de classe C^n : on peut faire une récurrence sur n, en remarquant que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (T^n(f))' = T^{n-1}(f)$
   $(T^n(f))^{(k)} = T^{n-k}(f)$: à k fixé, on peut faire une récurrence sur n pour $n \geqslant k+1$, en utilisant de nouveau la propriété : $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ (T^p(f))' = T^{p-1}(f)$.
   On montre aussi que $(T^n(f))^{(n)} = f$ et $(T^n(f))^{(k)}(0) = 0$ (ce sont des primitives qui s'annulent en 0...
2. C'est la question 0 appliquée à $u = T^n(f)$ car $(T^n(f))^{(n)} = f$ et $(T^n(f))^{(k)}(0) = 0$.
3. On a vu que $\mathrm{Ker}\, T = \{0\}$ donc T est injective et donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, T^n est injective comme composée de fonctions injectives.
   On a vu que $Im(T)$ est l'ensemble des fonctions de classe C^1 qui s'annule en 0. Alors $Im(T^2)$ est l'ensemble des fonctions dont la dérivée est dans $Im(T)$ et qui s'annulent en 0 : c'est donc l'ensemble des fonctions de classe C^2 qui s'annulent en 0 et dont la dérivée s'annule en 0.
   Par récurrence, on montre que $Im(T^n)$ est l'ensemble des fonctions de classe C^n dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$ s'annulent en 0.
4. T^n est une composée d'endomorphismes continus, donc c'est un endomorphisme continu.
5. En utilisant l'égalité d'une question précédente :
   $\forall x \in [0,1],\ |(T^n(f))(x)| = |\displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\,\mathrm{d}t| \leqslant (T^n(|f|))(x) = \int_0^x |\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)|\,\mathrm{d}t$
   $\leqslant \displaystyle\int_0^x |\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}|\,\mathrm{d}t.\|f\|_\infty \leqslant \left[-\frac{(x-t)^n}{n!}\right]_0^x .\|f\|_\infty \leqslant \frac{\|f\|_\infty}{n!} \Rightarrow \|T^n(f)\|_\infty \leqslant \frac{\|f\|_\infty}{n!} \Rightarrow |||T^n||| \leqslant \frac{1}{n!}$.
   Mais pour f_0, on a : $\forall x \in [0,1],\ (T^n(f_0))(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{(x-t)^n}{n!}\right]_0^x = \frac{x^n}{n!} \Rightarrow \|T^n(f_0)\|_\infty = \frac{1}{n!}$ donc $|||T^n||| \geqslant \frac{1}{n!}$ et par double inégalité $|||T^n|| = \frac{1}{n!}$.

6. $|||T^n|| = \frac{1}{n!}$ et $\lim \frac{1}{n!} = 0$. Donc (T^n) est une suite convergente et $\lim T^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

7. D'après ce qui précède, $0 \leqslant |T^n(f)(x)| \leqslant \|T^n(f)\| \leqslant \dfrac{\|f\|}{n!}$ qui est le terme général d'une série (exponentielle) convergente. Donc la série $\sum |T^n(f)(x)|$ est convergente donc la série $\sum T^n(f)(x)$ est absolument convergente.

Question 4.

1. $\forall (f,g) \in E, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ H(\alpha f + \beta g) = \alpha H(f) + \beta H(g)$ par linéarité de l'intégrale, ce qui nous donne la linéarité de H.

$\forall f \in E,\ \forall x \in [0,1],\ H(f)(x) = e^x . \displaystyle\int_0^x e^{-t} f(t)\,\mathrm{d}t$, or $x \mapsto e^x$ est continue sur $[0,1]$, $x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{-t} f(t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur $[0,1]$ comme fonction intégrale d'une fonction continue sur $[0,1]$ et donc $H(f)$ est continue comme produit de fonctions continues. d'où $\forall f \in E,\ H(f) \in E$.

Donc H est un endomorphisme.

2. Soit $x \in [0,1]$. $|H(f)(x)| = |\displaystyle\int_0^x e^{x-t} f(t)\,\mathrm{d}t| \leqslant \underbrace{\left(\int_0^x e^{-t}\,\mathrm{d}t\right)}_{\leqslant \int_0^1 e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1 - \frac{1}{e}} . \underbrace{e^x}_{\leqslant e} . \|f\|_\infty \leqslant (e-1) . \|f\|_\infty$

Donc pour $K = e - 1$ on a $\forall x \in [0,1],\ |H(f)(x)| \leqslant K . \|f\|_\infty$

D'après l'inégalité précédente, on : $\forall f \in E,\ \|H(f)\|_\infty \leqslant K . \|f\|_\infty$ et H est linéaire, ce qui nous donne la continuité de K en tant qu'application linéaire de $(E, \|.\|_\infty)$ dans lui-même et $|||H||| \leqslant e - 1 \leqslant e$.

Donc H est continue de $(E, \|.\|_\infty)$ dans lui-même et $|||H||| \leqslant e$

3. Pour $f \in E$, $\forall x \in [0,1],\ H(f)(x) = e^x . \int_0^x e^{-t} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Or $x \mapsto e^x$ est C^1 sur $[0,1]$, et $x \mapsto \int_0^x e^{-t} f(t)\,\mathrm{d}t$ est C^1 sur $[0,1]$ comme fonction intégrale d'une fonction continue sur $[0,1]$. On en déduit que $H(f)$ est C^1 sur $[0,1]$ en tant que produit de fonctions de classe C^1 sur $[0,1]$.

$\forall x \in [0,1],\ H(f)'(x) = e^x . \displaystyle\int_0^x e^{-t} f(t)\,\mathrm{d}t + e^x . e^{-x} . f(x) = H(f)(x) + f(x)$.

Donc $\forall x \in [0,1],\ H(f)'(x) = H(f)(x) + f(x)$.