TOPOLOGIE DES E.V. NORMÉS

I — Norme

1) Norme et distance - Généralités

a) Norme

Définition d'une norme : *(1)*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit que E est normé lorsqu'il est muni d'une **norme**, *c'est à dire une application $\|.\| : E \to \mathbb{R}_+$ telle que :*

(1) : $\|.\|$ **est définie :** $\forall u \in E, \|u\| = 0 \Rightarrow u = 0_E$ *(la réciproque est vraie grâce à la condition suivante)*

(2) : $\|.\|$ **est positivement homogène :** $\forall (\lambda, u) \in \mathbb{K} \times E, \|\lambda \cdot u\| = |\lambda| \cdot \|u\|$

(3) : $\|.\|$ **vérifie l'inégalité triangulaire :** $\forall (u, v) \in E^2, \|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$.

Exemples : *(2)*

(1) : *Valeur absolue, module, $\|.\|_1$, $\|.\|_2$, $\|.\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$.*

(2) : *Norme p sur $\mathbb{K}^n$ (inégalité de Minkowski)*

(3) : *Normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$, $\|.\|_\infty$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

(4) : *Norme de la convergence uniforme sur $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$: $\|f\|_\infty = \sup_X\{|f(x)|\}$*

(5) : *Norme infinie ou de convergence uniforme sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$: $\|f\|_\infty = \max_{[a,b]}\{|f(x)|\}$*

(6) : *Norme de la convergence en moyenne sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$. $N_1 : f \mapsto \int_0^1 |f(t)|dt$*

(7) : *Norme euclidienne associée à un produit scalaire sur un espace préhilbertien réel.)* ***Notation :*** *$\|.\|_2$. Exemple de $\mathbb{K}^n$ et de la norme en convergence en moyenne quadratique de $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$.*

(8) : *Normes N_1, N_2, N_∞ sur les espaces de suites réelles ou complexes.*

(9) : *Norme induite : si F est un sous-espace vectoriel de E, la restriction à F de $\|.\|_E$ est notée $\|.\|_F$: c'est une norme sur F.*

Norme produit : *(3)*

Soient $(E, \|\|_E)$ et $(F, \|\|_F)$ deux espaces vectoriels normés.
Pour $(a, b) \in E \times F$, $\|(a, b)\|_{E \times F} = \max(\|a\|_E, \|b\|_F)$ est une norme sur $E \times F$.
On peut généraliser par récurrence.

Vecteurs unitaires : *(4)*

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé réel ou complexe.
On dit que u est un vecteur unitaire de $E \Leftrightarrow \|u\| = 1$. Leur ensemble s'appelle la **sphère unité** *de E.*
Si u est un vecteur non nul, alors $\dfrac{u}{\|u\|}$ est unitaire.

Deuxième inégalité triangulaire *(5)*

$\forall (u, v) \in E^2, |\|u\| - \|v\|| \leqslant \|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$

Exercice 1 : Sphère(s) unité(s) usuelles dans $\mathbb{R}^2$

Dessiner la sphère unité de $(\mathbb{R}^2, \|.\|_1)$, $(\mathbb{R}^2, \|.\|_2)$ et $(\mathbb{R}^2, \|.\|_\infty)$.

b) Distance

Définition d'une distance entre deux points : *(6)*

Soit E un ensemble (pas forcément un espace vectoriel...) On dit que E est un espace métrique lorsqu'il est muni d'une métrique (ou plus couramment une distance entre deux points), c'est à dire une fonction $d : E^2 \to \mathbb{R}_+$ telle que :

(1) : d **est symétrique :** $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = d(y, x)$.

(2) : d **sépare les éléments de** E **:** $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

(3) : d **vérifie l'inégalité triangulaire :** $\forall (x, y, z) \in E^3, d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$.

Distance associée à une norme : *(7)*

Si $(E, \| \ \|)$ est un espace vectoriel normé, on peut définir une distance associée à la norme en posant $d_{\| \ \|_E}(u, v) = \|u - v\|$.

Exemples : *(8)*

(1) : *sur $\mathbb{R}$, la distance usuelle est celle associée à la valeur absolue.*

(2) : *sur $\mathbb{R}^2$, la distance associée à la norme 1 est $d(u, v) = |x_v - x_u| + |y_v - y_u|$ (aussi appelée* distance de Manhattan *: c'est la distance à parcourir pour aller d'un point à un autre dans ce quartier de New-York étant donné l'agencement des rues et avenues horizontales et verticales)*

(3) : *sur $\mathbb{R}^2$, la distance associée à la norme infinie est $d(u, v) = \max(|x_v - x_u|, |y_v - y_u|)$ (aussi appelée* distance aux échecs *: c'est le nombre minimal de mouvements à effectuer pour un Roi pour aller d'une case à une autre.)*

Exercice 2 : Complément : distance d'un point à une partie :

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et d la distance associée à la norme $\|.\|$. Soit A une partie de E. Pour $u \in E$, on peut définir la distance de l'élément $u \in E$ à la partie A en posant

$$d(u, A) = \inf\{d(u, v) | v \in A\}.$$

On emploie encore le mot "distance", mais ce n'est pas une métrique (u est un élément et A est une partie). En particulier, $d(u, A) = 0$ n'implique pas $u \in A$. Par exemple $d(0,]0, 1[) = 0$ ou bien $d(\sqrt{2}, \mathbb{Q}) = 0$...

(1) : *En utilisant que $|\|u\| - \|v\|| \leqslant \|u - v\|$, montrer que $|d(u_1, A) - d(u_2, A)| \leqslant d(u_1, u_2)$.*

(2) : *Soit $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ l'espace des suites bornées muni de la norme infinie $\|.\|_\infty$. Montrer que la distance de la suite e constante égale à 1 au sous espace $\mathcal{C}_0$ des suites réelles convergeant vers 0 est égale à 1.*

c) Boules

Définition : *(9)*

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé, $u \in E$ et $r \geqslant 0$. On appelle :

(1) : *boule fermée de centre u de rayon r l'ensemble $\overline{B}(u, r) = \{v \in E| \ \|u - v\| \leqslant r\} = \{v \in E | d_{\|.\|_E}(u, v) \leqslant r\}$.*

(2) : *boule ouverte de centre u de rayon r l'ensemble $\mathring{B}(u, r) = \{v \in E| \ \|u - v\| < r\} = \{v \in E | d_{\|.\|_E}(u, v) < r\}$.*

(3) : *sphère de centre u de rayon r l'ensemble $S(u, r) = \{v \in E| \ \|u - v\| = r\} = \{v \in E | d_{\|.\|_E}(u, v) = r\}$.*

Exemples : boules unités pour les normes usuelles *(10)*

On appelle boule unité fermée de $(E, \|.\|)$ l'ensemble $\overline{B}(0, 1)$. Représenter les boules unités fermées de $(\mathbb{R}^2, \|.\|_1)$, $(\mathbb{R}^2, \|.\|_2)$ et $(\mathbb{R}^2, \|.\|_\infty)$.

Représenter ensuite celles de $(\mathbb{R}^3, \|.\|_1)$, $(\mathbb{R}^3, \|.\|_2)$ et $(\mathbb{R}^3, \|.\|_\infty)$.

Propriété : les boules sont des parties convexes *(11)*

Soit $\overline{B} = \overline{B}(a, r)$. Montrer que pour tout $\lambda \in]0, 1[$, pour tout $(u, v) \in \overline{B}^2$, $\lambda u + (1 - \lambda) v \in \overline{B}$.

d) Parties bornées

Définition : *(12)*

Soit $(E, \|.\|)$ *un espace vectoriel normé et* A *une partie de* E.
On dit que A *est bornée si et seulement s'il existe* $M \in \mathbb{R}_+$ *tel que* $\forall u \in A, \|u\| \leqslant M$
(1) : A *est bornée* $\iff$ A *est incluse dans une boule (le centre est indifférent).*
(2) : *Si* A *est bornée* **non vide**, *on peut définit le diamètre de* A *par* $\{\sup\{\|u-v\| |(u,v) \in A^2\} = \{\sup\{d_{\|.\|}(u,v)|(u,v) \in A^2\}$.

Exemples : *(13)*

(1) : *Les boules sont des parties bornées.*
(2) : *Donner la définition d'une suite bornée* $(u_n)_{\mathbb{N}}$ *à valeurs dans un espace vectoriel normé* $(E, \|.\|)$.
(3) : *Donner la définition d'une fonction bornée* $f : X \to E$ *à valeurs dans un espace vectoriel normé* $(E, \|.\|)$.

Théorème : indépendance de la norme en dimension finie *(14)*

Soit X *une partie bornée d'un* $\mathbb{K}$*-ev* **de dimension finie** *pour* **l'une des trois normes usuelles** $\| \|_1, \| \|_2$ *ou* $\| \|_\infty$ *:*
(1) : *alors les coordonnées dans une base fixée sont majorées en module par une constante.*
(2) : *et dans ce cas, la partie est bornée pour toute autre norme.*

Exercice 3 : Contre exemple en dimension infinie

Soit E *un espace vectoriel et* A *une partie de* E.
(1) : *Montrer que si* A *est bornée dans* (E, N_1) *et* A *n'est pas bornée dans* (E, N_2), *alors il existe une suite* $(u_n)_{\mathbb{N}}$ *d'éléments de* E *telle que* $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{N_1(u_n)}{N_2(u_n)} = 0$
Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. *Pour* $f \in E$, *on définit* $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$ *et* $\|f\|_\infty = \max_{[0,1]} |f|$.
(2) : *Montrer que* $\| \|_1$ *et* $\| \|_\infty$ *sont deux normes sur* $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$.
(3) : *Soit* $T_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, *telle que* $T_n(t) = n(1-t)$ *si* $t \in [0, 1/n]$ *et* $T_n(t) = 0$ *sinon.*
(4) : *Montrer que* $\{T_n\}_{\mathbb{N}^*}$ *est borné dans* $(E, \|.\|_1)$ *mais pas dans* $(E, \|.\|_\infty)$.

Propriétés : opérations sur les parties bornées *(15)*

(1) : *Toute partie d'une partie bornée est bornée.*
(2) : *Toute union finie de parties bornées est une partie bornée.*
(3) : *Toute l'intersection (quelconque) de parties bornées est une partie bornée.*
(4) : *Tout produit cartésien fini de parties bornées est une partie bornée pour la norme produit.*

e) Voisinages

Définition : *(16)*

(1) : *On appelle voisinage d'un élément* $u \in E$ *toute partie* V *de* E *telle que*

$$\exists \varepsilon > 0, \mathring{B}(u, \varepsilon) \subset V.$$

(2) : *Dans* $E = \mathbb{R}$, *une partie* V *de* $\mathbb{R}$ *est un voisinage de* $a \in \mathbb{R}$ *si et seulement s'il existe* $\varepsilon > 0$ *tel que* $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\subset V$.
(3) : *On peut généraliser la notion de voisinage à un élément infini : par exemple, on appelle*
— *voisinage de* $+\infty$ *tout ensemble contenant un intervalle du type* $]A, +\infty[$ *pour* $A \in \mathbb{R}$.
— *voisinage de* $-\infty$ *tout ensemble contenant un intervalle du type* $]-\infty, B[$ *pour* $B \in \mathbb{R}$.

Propriétés : opérations ensemblistes sur les voisinages *(17)*

(1) : *l'intersection d'une famille finie de voisinages est un voisinage.*
(2) : *l'union (quelconque) de voisinages est un voisinage.*
(3) : *une intersection infinie de voisinage peut NE PAS être un voisinage.*

II — Suites convergentes

1) Définitions

Définition : suite convergente *(18)*

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans E.
(1) : *On dit que $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est convergente s'il existe un vecteur $\ell \in E$ tel que :*
$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \|u_n - \ell\| \leqslant \varepsilon$.
Important : *on peut remplacer $\|u_n - \ell\| \leqslant \varepsilon$ par $\|u_n - \ell\| \leqslant K\varepsilon$ avec $K > 0$ fixé.*
$\Longleftrightarrow$ *tout voisinage de ℓ contient tous les termes de la suite sauf un nombre fini.*
$\Longleftrightarrow$ *tout voisinage de ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.*

2) Propriétés

Propriétés de convergence *(19)*

(1) : *Toute suite convergente est bornée.*
(2) : **Unicité de la limite :** *si $(u_n)_{\mathbb{N}}$ converge vers ℓ et vers ℓ', alors $\ell = \ell'$.*
Cela justifie la notation $\lim_{n\to\infty} u_n$.
(3) : *On dit qu'un ensemble D est dense dans E ssi tout élément $x \in E$ est limite d'une suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ à valeurs dans D.*

Exercice 4 : Exemple d'ensembles denses

On munit l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ de la norme infinie $\|A\| = \max_{(i,j)\in[1,p]^2}(|a_{i,j}|)$.
(1) : *Justifier que $(A - \frac{1}{n}I_p)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de matrices qui converge et préciser sa limite.*
(2) : *En déduire que toute matrice de E est limite d'une suite de matrices inversibles, c'est à dire que $\mathcal{GL}_p(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.*
(3) : *On note $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des matrices de E qui sont diagonalisables. Montrer que $\mathcal{D}_n$ est dense dans E.*

Théorèmes opératoires sur les suites convergentes *(20)*

(1) : *Une suite qui est* **combinaison linéaire** *de suites convergentes dans $(E, \|.\|_E)$ est une suite convergente dans $(E, \|.\|_E)$ et la limite de la combinaison de deux suites convergentes est égale à la combinaison linéaire des limites.*
(2) : *Le* **produit d'une suite scalaire** *convergente dans $\mathbb{K}$ par une suite vectorielle convergente dans $(E, \|.\|_E)$ est une suite vectorielle convergente dans $(E, \|.\|_E)$ et sa limite est le produit des limites.*
(3) : *Si $(u_n)_{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $(E, \|.\|_E)$ et $(v_n)_{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $(F, \|.\|_F)$, alors la suite $((u_n, v_n))_{\mathbb{N}}$ est convergente dans $(E \times F, \|.\|_{E\times F})$ (norme produit) si et seulement si $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est convergente et $(v_n)_{\mathbb{N}}$ est convergente.*
Et dans ce cas, $((u_n, v_n))_{\mathbb{N}}$ converge vers $(\lim u_n, \lim v_n) \in E \times F$.

Composition avec la fonction $\|.\|$: *(21)*

Si $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$ alors $\|u_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|\ell\|$.

Exercice 5 : Distance au vecteur nul ou à une partie non vide

Si u est une suite complexe, et si $\ell \neq 0$, alors $u_n \neq 0$ pour n assez grand.
Plus généralement, on rappelle que la distance entre un point x à une partie $A \subset E$ non vide est égale à $d(x, A) = \inf_{y\in A}\{d(x, y)\}$.
Si (u_n) converge vers ℓ dans E, alors $(d(u_n, A))_{\mathbb{N}}$ converge vers $d(\ell, A)$ dans $\mathbb{R}$. 3

Théorème : convergence dans un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie : *(22)*

Une suite converge pour l'une des normes usuelles si et seulement si les coordonnées dans une base fixée convergent dans $\mathbb{K}$. Dans ce cas, les coordonnées de la limite sont les limites des coordonnées et la suite converge vers cette limite pour toute norme.

3) Comparaison asymptotique (rappels MPSI et généralisation)

Définition : *(23)*

Soit (u_n) *et* (v_n) *des suites vectorielles à valeurs dans* E *et* (λ_n) *une suite RÉELLE à valeurs dans* $\mathbb{R}_+$.

$u_n = o(\lambda_n) \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall n \geqslant N$, *on a* $\|u_n\| \leqslant \varepsilon\lambda_n$ *(*(λ_n) *positive).*

$u_n = O(\lambda_n) \iff \exists M \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall n \geqslant N$, *on a* $\|u_n\| \leqslant M\lambda_n$ *(*(λ_n) *positive).*

$u_n \sim v_n \iff u_n - v_n = o(\|v_n\|)$ *(c'est une relation d'équivalence).*

$u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell \iff u_n - \ell = o(1)$.

(u_n) *est bornée* $\iff u_n = O(1)$.

Caractérisation : *(24)*

Soit (u_n) *et* (v_n) *des suites vectorielles à valeurs dans* E

Si (λ_n) *est à valeurs strictement positives et* (μ_n) *est à valeurs réelles :*

$u_n = o(\lambda_n) \iff \dfrac{1}{\lambda_n}\cdot u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

$u_n = O(\lambda_n) \iff \left(\dfrac{1}{\lambda_n}\cdot u_n\right)$ *est bornée.*

$\mu_n \sim \lambda_n \iff \mu_n/\lambda_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$. *Dans ce cas,* $\mu_n > 0$ *pour* n *assez grand.*

Théorème / Méthode : *(25)*

(1) : *L'équivalence entre suites réelles est compatible avec la multiplication, la division et l'élévation à une puissance constante.*

(2) : *Pour toute autre opération entre suites équivalentes, écrire* $u_n = v_n + o(v_n)$, *substituer et simplifier.*

4) Suites extraites

Définition : *(26)*

(1) : *On appelle* **extraction** *toute fonction strictement croissante de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$. ***Notation :*** $\varphi : n \mapsto \varphi(n)$.

Exemples : les fonctions qui à n *associent* $n, 2n, 2n+1, n^2, 2^n$...

(2) : *La composition de deux extractions est une extraction.*

(3) : *Une suite extraite (ou sous-suite) de* (u_n) *est une suite indexée par une partie infinie de* $\mathbb{N}$ *obtenue par une extraction de la suite* (u_n). *On la note* $(u_{\phi(n)})$.

Propriétés des suites extraites *(27)*

(1) : *Si* $\lim u_n = \ell$ *alors* $\lim u_{\varphi(n)}$ *existe et* $\lim u_{\varphi(n)} = \ell$ *(que* ℓ *soit finie ou infinie).*

(2) : $u_n \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} \ell \iff \exists \varepsilon > 0$, *et* φ *fonction d'extraction tq* $\forall n \in \mathbb{N}$, *on a* $d(u_{\varphi(n)}, \ell) \geqslant \varepsilon$.

(3) : (u_n) *est non bornée* $\iff$ *il existe une suite extraite qui diverge vers l'infini.*

Définition - Théorème : valeur d'adhérence *(28)*

Soient (u_n) *une suite à valeurs dans* E *et* $\ell \in E$.

(1) : *Il existe une suite extraite de* (u_n) *de limite* $\ell \iff$ *tout voisinage de* ℓ *contient des termes* u_n *pour une infinité de valeurs de* n.

(2) : *Dans ce cas, on dit que l'élément* ℓ *est valeur d'adhérence de* (u_n)

Condition suffisante de divergence *(29)*

Une suite ayant deux valeurs d'adhérence distinctes est nécessairement divergente.

Exercice 6 : Théorème de Bolzano-Weierstrass

(1) : **MPSI :** *Montrer que toute suite réelle bornée admet une valeur d'adhérence.*

(2) : **MP :** *Soit* $(E, \|.\|)$ *un* $\mathbb{K}$*-ev normé de dimension finie.*

Montrer que toute suite bornée dans E *admet une valeur d'adhérence.*

III — Comparaison de normes

1) Normes équivalentes

Définitions de normes équivalentes *(30)*

(1) : *N est plus fine que N'* $\iff \exists\, \alpha > 0$ *tq* $N' \leqslant \alpha N$.
(2) : *N et N' sont équivalentes* $\iff \exists\, \alpha, \beta > 0$ *tq* $\beta N \leqslant N' \leqslant \alpha N$.

Propriétés des normes équivalentes *(31)*

Deux normes équivalentes définissent :

- *les mêmes suites convergentes,*
- *les mêmes limites,*
- *les mêmes parties bornées,*
- *les mêmes voisinages.*

Théorème de comparaison de normes *(32)*

(1) : *N est plus fine que N' si et seulement si toute suite convergeant pour N converge aussi pour N' vers la même limite.*
(2) : *N et N' sont équivalentes si chacune est plus fine que l'autre.*

Exemples *(33)*

Dans un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, toutes les normes usuelles sont équivalentes entre elles et sont plus fines que toute norme.
Dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$, $\| \ \|_\infty$ est plus fine que $\| \ \|_2$, elle-même plus fine que $\| \ \|_1$. Ces normes sont deux à deux non équivalentes, mais quand une suite de fonctions converge pour deux de ces normes, alors les limites sont égales.
Dans $\mathbb{K}[X]$, les normes définies par : $N(P) = |P(0)| + \int_{t=0}^{1/2} |P'(t)| \,\mathrm{d}t$ et $N'(P) = |P(1)| + \int_{t=0}^{1/2} |P'(t)| \,\mathrm{d}t$ sont incomparables. La suite (X^n) converge vers 0 pour N et vers 1 pour N'. Par ailleurs, le passage à la limite n'est pas compatible avec la substitution.

2) En dimension finie

Théorème *(34)*

Dans un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

IV — Topologie d'un espace vectoriel normé

1) Ouverts, fermés

Définition : *(35)*

(1) : *Un ouvert est un ensemble qui est un voisinage de chacun de ses points, c'est à dire dans le cas d'un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$,*

$$O \text{ est un ouvert de } E \ \Leftrightarrow \forall u \in O, \exists \varepsilon > 0, B(u,\varepsilon) \subset O.$$

Faire un dessin.
(2) : *Un fermé est un ensemble dont le complémentaire est un ouvert.*

Normes équivalentes et topologie : *(36)*

(1) : *Si N_1 et N_2 sont deux normes équivalentes, les topologies de (E, N_1) et (E, N_2) sont identiques, c'est à dire :*

- *O est un ouvert de $(E, N_1) \Leftrightarrow O$ est un ouvert de (E, N_2),*
- *F est un ouvert de $(E, N_1) \Leftrightarrow F$ est un ouvert de (E, N_2),*

(2) : *En dimension finie, les ouverts et les fermés sont intrinsèques (indépendants du choix d'une norme).*

Propriétés *(37)*

(1) : *Un fermé est un ensemble stable par passage à la limite finie, c'est à dire :*
F est un fermé de $E \Leftrightarrow$ pour toute suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ à valeurs dans F, si $(u_n)_{\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in E$, alors ℓ appartient à F.
(2) : *L'ensemble des ouverts est stable par union quelconque et par intersection finie.*
(3) : *L'ensemble des fermés est stable par intersection quelconque et par union finie.*
(4) : *A est ouvert $\Longleftrightarrow A$ est une réunion de boules ouvertes.*
(5) : *Seuls E et $\emptyset$ sont à la fois ouvert et fermé.*

Exemples *(38)*

E, $\emptyset$, boules, sphères, intervalles de $\mathbb{R}$, ensemble fini ou de complémentaire fini.
Un sev de dimension finie est fermé. Contre-exemple en dimension infinie.
Si $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$ alors $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$ est fermé.
$[0, 1[$ n'est NI fermé, NI ouvert dans $\mathbb{R}$. En particulier, un fermé est le complémentaire d'un ouvert, mais une partie qui n'est pas fermée n'a aucune raison d'être ouverte...

2) Intérieur, adhérence, frontière

Intérieur, adhérence, frontière : *(39)*

(1) : *$\mathring{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans A,*
(2) : *$\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A,*
(3) : *$Fr(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A}$.*
(4) : *Ces notions sont inchangées si on remplace la norme de E par une norme équivalente ; en dimension finie elles sont intrinsèques.*

Propriétés *(40)*

(1) : *$\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$.*
(2) : *$A \subset B \Rightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}$ et $\overline{A} \subset \overline{B}$.*
(3) : *A est ouvert $\Longleftrightarrow A = \mathring{A}$.*
(4) : *A est fermé $\Longleftrightarrow A = \overline{A}$.*
(5) : *$a \in \mathring{A} \Longleftrightarrow A$ est un voisinage de a.*
(6) : *$a \in \overline{A} \Longleftrightarrow d(a, A) = 0 \Longleftrightarrow a$ est limite d'une suite d'éléments de A.*
(7) : *$a \in Fr(A) \Longleftrightarrow a$ est limite d'une suite d'éléments de A et d'une suite d'éléments de $E \setminus A$.*

Exemples : *(41)*

E, $\emptyset$, boules, sphères, sev,
Intervalles de $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

3) Densité

Densité : *(42)*

(1) : *A est dense dans B si $B \subset \overline{A}$.*
(2) : *A est dense dans $E \Longleftrightarrow$ tout ouvert non vide rencontre A.*
(3) : *A est dense dans $E \Longleftrightarrow$ tout élément de E est limite d'une suite à valeurs dans A.*

4) Topologie relative à une partie

Topologie relative : *(43)*

Soient $A \subset B \subset E$.

(1) : *A est un ouvert relatif de B si pour tout $a \in A$, il existe $r > 0$ tel que : $\forall x \in B$, $d(a,x) \leqslant r \Rightarrow x \in A$.*

(2) : *A est un fermé relatif de B si pour toute suite $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ convergeant vers $\ell \in B$, on a $\ell \in A$.*

(3) : *Si $b \in \overline{B}$, A est un voisinage relatif de b dans B s'il existe $r > 0$ tel que : $\forall x \in B$, $d(b,x) \leqslant r \Rightarrow x \in A$.*

(4) : *Si B n'est pas borné, A est un voisinage relatif de l'infini dans B s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in B$, $\|x\| \geqslant M \Rightarrow x \in A$.*

Propriété : *(44)*

(1) : *A est un ouvert (resp. fermé, voisinage) relatif si et seulement s'il existe $A' \subset E$ ouvert (resp. fermé, voisinage) tel que $A = A' \cap B$.*

(2) : *En conséquence, le complémentaire d'un ouvert relatif est un fermé relatif et inversement.*

Exemples dans un intervalle de $\mathbb{R}$, dans la réunion de deux intervalles.

V — Compacité

Définition : propriété de Bolzano-Weierstrass (vraie par convention pour $\emptyset$). *(45)*

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Soit K une partie de E. On dit que K est un compact de E si et seulement si de toute suite à valeurs dans K, on peut extraire une suite convergente vers une limite finie ℓ **telle que $\ell \in K$.**

Propriétés *(46)*

(1) : *Quelle que soit la dimension, un compact est toujours fermé borné. En dimension finie, la réciproque est vraie.*

(2) : *Contre-exemple en dimension infinie : $E = \mathbb{R}[X]$, $N(P) = \max |a_k|$. Alors $B(0,1)$ est fermée, bornée, mais non compacte.*

(3) : *Pour $A, B \neq \emptyset$: $A \times B$ est compact dans $E \times F$ si et seulement A et B sont compacts.*

(4) : *Si $A \subset B$ et B est compact alors A est compact $\Longleftrightarrow A$ est fermé.*

(5) : *Si $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$ alors $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$ est compact.*

Théorème *(47)*

(1) : *Soient A compact et $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$. Si cette suite n'a qu'une seule valeur d'adhérence alors elle converge vers cette valeur d'adhérence.*

(2) : *En conséquence, dans un ev de dimension finie, une suite bornée n'ayant qu'une seule valeur d'adhérence est convergente.*

(3) : *Contre-exemple en dimension infinie.*

Exercice 7 : Théorème des bornes atteintes

(1) : *Soient A compact non vide et $x \in E$. Montrer qu'il existe $a \in A$ tel que $d(x,a) = d(x,A)$.*

(2) : *Monter que cette conclusion est encore vraie pour A fermé non vide lorsque E est de dimension finie.*

(3) : *Soit A compact non vide. Alors il existe $(a,b) \in A^2$ tels que $d(a,b)$ est égal au diamètre de A.*

Exercice 8 : Théorème de Riesz :

(1) : *Dans un ev de dimension infinie, il existe une suite de vecteurs unitaires sans valeur d'adhérence.*

(2) : *En conséquence, ni la sphère unité, ni la boule unité ne sont compactes.*

VI — Exercices

Normes et distances

Exercice 9 : Normes sur $\mathbb{K}$:

Montrer que sur $\mathbb{K}$, toute norme est proportionnelle au module.

Exercice 10 :

Soit $F = \mathcal{C}_{PM}([a,b],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonction continues par morceaux sur $[a,b]$. L'application $N : f \mapsto \int_{[a,b]} |f|$ est-elle une norme sur F ?

Exercice 11 :

Existe-t-il une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ invariante par conjugaison (c'est à dire $\|A\| = \|P^{-1}AP\|$) ?

Exercice 12 : Translation et dilatation :

Montrer que $\overline{B}(a,r) = a + r\overline{B}(0,1)$.

Exercice 13 : Représenter des boules

Soit $E \neq \{0\}$ un espace vectoriel normé. Illustrer les résultats suivants puis les démontrer :
$\mathring{B}(a,r) \subset \mathring{B}(b,s) \Longleftrightarrow d(a,b) + r \leqslant s, \quad \mathring{B}(a,r) \cap \mathring{B}(b,s) = \emptyset \Longleftrightarrow d(a,b) \geqslant r + s,$
$\overline{B}(a,r) \subset \overline{B}(b,s) \Longleftrightarrow d(a,b) + r \leqslant s, \quad \overline{B}(a,r) \cap \overline{B}(b,s) = \emptyset \Longleftrightarrow d(a,b) > r + s.$
En conséquence, pour $E \neq \{0\}$, le centre et le rayon d'une boule sont uniques.

Exercice 14 : Mêmes boules, mêmes normes

Soient N_1, N_2 deux normes sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

1. *On note $B_1 = \{x \in E \mid N_1(x) \leqslant 1\}$ et $B_2 = \{x \in E \mid N_2(x) \leqslant 1\}$.*
   Montrer
   $$B_1 = B_2 \implies N_1 = N_2$$
2. *Même question avec les boules unités ouvertes.*

Exercice 15 :

On définit sur $E = \mathcal{C}^0([0\,;1],\mathbb{R})$ une norme par

$$N(f) = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

1. *Soient $a, b \geqslant 0$ et $u, v > 0$. Établir que*
   $$\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1 \implies \frac{1}{u+v} \leqslant \frac{a}{u} + \frac{b}{v}$$
2. *Soient $f, g \in E$ telles que $f, g > 0$. Montrer*
   $$N((f+g)^{-1}) \leqslant \frac{N(f)^2 N(f^{-1}) + N(g)^2 N(g^{-1})}{(N(f)+N(g))^2}$$
3. *En déduire que*
   $$N(f+g)N((f+g)^{-1}) \leqslant \max(N(f)N(f^{-1}), N(g)N(g^{-1}))$$

Exercice 16 : Égalité du parallélogramme

Soit $(E, \|.\|)$ *un espace vectoriel normé sur* $\mathbb{K}$ *(*$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*).*

1. *Montrer que pour tous* $x, y \in E$
$$\|x\| + \|y\| \leqslant 2 \max \{\|x+y\|, \|x-y\|\}$$
2. *Montrer que l'on peut avoir l'égalité avec* $x \neq 0$ *et* $y \neq 0$.
Désormais la norme est euclidienne.
3. *Montrer que pour tous* $x, y \in E$
$$\|x\| + \|y\| \leqslant \sqrt{2} \max \{\|x+y\|, \|x-y\|\}$$
4. *Peut-on améliorer la constante* $\sqrt{2}$ *?*

Exercice 17 : Normes matricielles

Pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$*. On pose*

$$\|A\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} |a_{i,j}|, \|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} |a_{i,j}|^2} \text{ et } \|A\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p} |a_{i,j}|$$

1. *Montrer que* $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ *et* $\|.\|_\infty$ *définissent des normes sur* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
2. *Déterminer une constante optimale* c_∞ *telle que pour toutes matrices* A *et* B *carrées,* $\|AB\|_\infty \leqslant c_\infty \|A\|_\infty \cdot \|B\|_\infty$
3. *En utilisant l'inégalité de Cauchy Schwarz, montrer que pour toutes matrices* A *et* B *carrées,* $\|AB\|_2 \leqslant \|A\|_2 \cdot \|B\|_2$.
4. *Déterminer une constante optimale* c_1 *telle que pour toutes matrices* A *et* B *carrées,* $\|AB\|_1 \leqslant c_1 \|A\|_1 \cdot \|B\|_1$
5. *On rappelle qu'en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. En utilisant la question 2, montrer que si* N *est une norme sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*, il existe* $c > 0$ *tel que* $N(AB) \leqslant cN(A)N(B)$

Exercice 18 : Norme subordonnée

On introduit une norme $\|.\|$ *sur l'espace des colonnes* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *en posant*

$$\|X\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$$

et on note S *l'ensemble formé des colonnes de* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *de norme égale à 1.*

1. *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*. Montrer l'existence de*
$$\sup_{X \in S} \|AX\|$$
2. *On pose*
$$N(A) = \sup_{X \in S} \|AX\|$$
Justifier que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\|AX\| \leqslant N(A) \|X\|$.
3. *Vérifier que* N *définit une norme sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4. *Montrer*
$$N(A) = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$$

Exercice 19 : Distances à une partie

On norme l'espace $\mathcal{B}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ *des suites bornées par la norme infinie notée* $\|.\|_\infty$.

1. *Déterminer la distance de la suite e constante égale à 1 au sous-espace vectoriel* $\mathcal{C}_0$ *des suites réelles convergeant vers 0.*
2. *Déterminer la distance de la suite* $u = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *au sous-espace vectoriel* $\mathcal{C}$ *des suites réelles convergentes.*

Exercice 20 : Norme sur un espace de fonctions

Soient l'espace $E = \left\{f \in \mathcal{C}^1([0\,;1],\mathbb{R}) \mid f(0) = 0\right\}$ *et* N *l'application définie sur* E *par*

$$N(f) = N_\infty(3f + f')$$

1. *Montrer que* (E, N) *est un espace vectoriel normé.*
2. *En remarquant que* $f(x) = e^{-3x}\int_0^x \dfrac{d}{dt}(f(t)e^{3t)dt}$, *montrer qu'il existe* $\alpha > 0$ *tel que* $N_\infty(f) \leqslant \alpha N(f)$.
3. *Les normes* N_∞ *et* N *sont-elles équivalentes ?*

Exercice 21 : Norme sur $\mathbb{R}[X]$

Sur $\mathbb{R}[X]$ *on définit* N_1 *et* N_2 *par :*

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left|P^{(k)}(0)\right| \text{ et } N_2(P) = \sup_{t\in[-1,1]}|P(t)|$$

1. *Montrer que* N_1 *et* N_2 *sont deux normes sur* $\mathbb{R}[X]$.
2. *Étudier la convergence pour l'une et l'autre norme de la suite de terme général*

$$P_n = \frac{1}{n}X^n$$

3. *Les normes* N_1 *et* N_2 *sont-elles équivalentes ?*

Exercice 22 : Norme sur un espace de suites

On note E *l'espace des suites réelles bornées* $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telles que* $u_0 = 0$.

1. *Montrer que*

$$N_\infty(u) = \sup_{n\in\mathbb{N}}|u_n| \text{ et } N(u) = \sup_{n\in\mathbb{N}}|u_{n+1} - u_n|$$

   définissent des normes sur l'espace E.
2. *Montrer que*

$$\forall u \in E, N(u) \leqslant 2N_\infty(u)$$

   Déterminer une suite non nulle telle qu'il y ait égalité.
3. *Montrer que ces deux normes ne sont pas équivalentes.*

Limites, suites convergentes

Exercice 23 : Limites "faciles"

1. *Soient* $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. *On suppose*
$$(AB)^n \to O_p$$
Montrer que
$$(BA)^n \to O_p$$
2. *Soient* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *telles que*
$$A^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} P \text{ et } B^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} Q$$
On suppose que les matrices A *et* B *commutent. Montrer que les matrices* P *et* Q *commutent.*
3. *Soit* (A_n) *une suite de matrices inversibles de* $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.
On suppose
$$A_n \to A \text{ et } A_n^{-1} \to B$$
Montrer que A *est inversible et déterminer son inverse.*

Exercice 24 : CNS

1. *À quelle condition sur* $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ *existe-t-il* $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ *vérifiant*
$$M^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} A?$$
2. *Variante :*
Soit $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. *On suppose que la suite* $(M^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* A.
Montrer que A *est semblable à une matrice diagonale n'ayant que des 0 et des 1.*

Exercice 25 : Suite géométrique

1. *Soit* $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ *diagonalisable vérifiant* $\mathrm{Sp}(A) \subset]-1\,;1[$. *Montrer* $A^n \to O_p$.
2. *Même question avec trigonalisable au lieu de diagonalisable.*

Exercice 26 : Limite subtile

Soit $a \in \mathbb{R}$. *Déterminer* $\lim_{n\to+\infty} A_n^n$ *avec*
$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & -a/n \\ a/n & 1 \end{pmatrix}$$
en écrivant $A_n = \lambda_n \begin{pmatrix} \cos\theta_n & -\sin\theta_n \\ \sin\theta_n & \cos\theta_n \end{pmatrix}$ *pour* $\lambda_n \in \mathbb{R}$ *à préciser.*

Exercice 27 : Suite géométrique de raison antisymétrique

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *une matrice antisymétrique telle que la suite* $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ *converge vers* B *dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Que dire de B *?*

Topologie : ouverts, fermés...

Exercice 28 : Sous espace vectoriel ouvert ?

Montrer que si un sous-espace vectoriel F *d'un espace vectoriel normé* E *est ouvert alors* $F = E$.

Exercice 29 : Distance à un fermé

Soit E une espace vectoriel normé.

1. *Soient F une partie fermée non vide de E et $x \in E$. Montrer*

$$d(x, F) = 0 \iff x \in F$$

2. *Soient F et G deux fermés non vides et disjoints de E.*
   Montrer qu'il existe deux ouverts U et V tels que

$$F \subset U, G \subset V \text{ et } U \cap V = \emptyset$$

Exercice 30 : Partie fermée 1

1. *Montrer que les parties*

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\right\} \text{ et } B = \{0\} \times \mathbb{R}$$

   sont fermées.
2. *Observer que $A + B$ n'est pas fermée.*

Exercice 31 : Partie fermée 2

Montrer que $\mathbb{Z}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}$:

1. *en observant que son complémentaire est ouvert ;*
2. *par la caractérisation séquentielle des parties fermées ;*
3. *en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue.*

Exercice 32 :

Soit $E = C^2([0,1], \mathbb{R})$. Pour f élément de E, on pose $N(f) = \int_0^1 |f(t)|\, dt$, $N'(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\, dt$ et $N''(f) = |f(0)| + |f'(0)| + \int_0^1 |f''(t)|\, dt$. Montrer que N, N' et N'' sont des normes et les comparer.

Exercice 33 : Topologie dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$]

1. *Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*
2. *Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus GL_n(\mathbb{R})$ est fermé mais non compact (pour $n \geqslant 2$).*
3. *Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est compact. $O_n(\mathbb{R})$ est-il convexe ?*
4. *Montrer que $S_n(\mathbb{R})$ est fermé.*
5. *Soit $p \in [\![0, n]\!]$. Montrer que l'ensemble des matrices de rang inférieur ou égal à p est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*
6. *Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Peut-on remplacer $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?*
7. *Montrer que l'ensemble des matrices stochastiques (matrices $(a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, $a_{i,j} \geqslant 0$ et $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$) est un compact convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*
8. *Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.*

Exercice 34 :

Montrer qu'entre deux réels distincts, il existe un rationnel (ou encore montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$).

Exercice 35 :

Soient A et B des parties d'un espace vectoriel normé E. Montrer que

1. $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$ *et* $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$.
2. $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$ *et* $A \subset B \Rightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}$.
3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ *et* $\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$.
4. $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ *et* $\overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}} \subset \mathring{A} \cup \mathring{B}$. *Trouver un exemple où l'inclusion est stricte.*
5. $\overset{\circ}{\overbrace{A \setminus B}} = \mathring{A} \setminus \overline{B}$.
6. $\mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}} = \mathring{\overline{A}}$ *et* $\overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}} = \overline{\mathring{A}}$.

Exercice 36 :

1. *Soient (E, N_E) et (F, N_F) deux espaces vectoriels normés. Soient f et g deux applications continues sur E à valeurs dans F. Soit D une partie de E dense dans E. Montrer que si $f_{/D} = g_{/D}$ alors $f = g$.*
2. *Déterminer tous les morphismes continus de $(\mathbb{R}, +)$ dans lui-même.*

Exercice 37 :

Soit u une suite bornée d'un espace vectoriel normé de dimension finie ayant une unique valeur d'adhérence. Montrer que la suite u converge.

Exercice 38 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leqslant a|x| + b$.

Exercice 39 :

Soit z un nombre complexe. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$.