Réduction

Contenus	Capacités & commentaires
a) Généralités	
Matrices semblables, interprétation géométrique. Sous-espace stable par un endomorphisme. Endomorphisme induit	Endomorphisme canoniquement associé à une matrice carrée. En dimension finie, traduire la stabilité de F par u à l'aide d'une matrice de u dans une base adaptée à F.

Contenus	Capacités & commentaires
b) Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée	
Droite stable par un endomorphisme. Valeur propre, vecteur propre (non nul), sous espace propre. Spectre d'un endomorphisme en dimension finie. La somme d'une famille finie de sous-espaces propres est directe. Le cardinal du spectre en dimension n est inférieur ou égal à n. Si deux endomorphismes u et v commutent, tout sous-espace propre de u est stable par v. Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres et spectre d'une matrice carrée.	Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre. Équation aux éléments propres $MX = \lambda X$. Deux matrices semblables ont même spectre. Si $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{K}'$ et si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le spectre de M dans $\mathbb{K}$ est inclus dans le spectre de M dans $\mathbb{K}'$.
c) Polynôme caractéristique	
Polynôme caractéristique d'une matrice carrée, d'un endomorphisme en dimension finie. Les racines du polynôme caractéristique sont les valeurs propres. Multiplicité d'une valeur propre. Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit.	Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique. Le polynôme caractéristique est unitaire. Notation χ_u, χ_A. Valeurs des coefficients de degrés 0 et $n-1$. La dimension du sous)espace propre associé à λ est majorée par la multiplicité de λ.

d) Endomorphismes et matrices carrées diagonalisables.

Un endomorphisme de E de dimension finie est diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est diagonale.
Pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable, il faut et il suffit que la somme de ses sous-espaces propres soit égale à E.
Une matrice carrée est dite diagonalisable si son endomorphisme canoniquement associé est diagonalisable.
Il faut et il suffit qu'elle soit semblable à une matrice diagonalisable.
Cas d'un endomorphisme en dimension n admettant n valeurs propres disctinctes.
Pour qu'un endomorphisme u soit diagonalisable, il faut et il suffit que χ_u soit scindé et que pour toute valeur propre de u, la dimension de l'espace propre associé soit égale à sa multiplicité.

Une telle base est constituée de vecteurs propres.
Cas des projecteurs et des symétries.

e) Endomorphismes et matrices carrées trigonalisables

Un endomorphisme d'une espace vectoriel E de dimension finie est dit trigonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice st triangulaire supérieure. Une matrice carrée est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieruer. Pour qu'un matrice carrée soit trigonalisable, il faut et il suffit que l'endomorphisme canoniquement associé le soit.
Un endomorphisme est trigonalisable ssi son polynôme caractéristique est scindé.

Interprétation géométrique.
Expression de la trace et du déterminant d'un endomorphisme trigonalisable, d'une matrice trigonalisable à l'aide des valeurs propres.
Recherche de la valeur propre de plus grand module à l'aide du quotient des traces de deux itérées successives.

f) Endomorphismes nilpotents, matrices nilpotentes

Endomorphisme nilpotent d'un espace E de dimension finie.
Matrice nilpotente.
Un endomorphisme est nilpotent si et seulement s'il est trigonalisable avec pour seule valeur propre 0.

L'indice de nilpotence est majoré par la dimension de E.

g) Polynômes d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, morphisme d'algèbres $P \mapsto P(u)$ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{L}(E)$. Le noyau de ce morphisme est l'idéal annulateur de u. Son image est la sous-algèbre commutative $\mathbb{K}[u]$ de $\mathcal{L}(E)$.
Polynôme minimal d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie, d'une matrice carrée.
Si d est le degré du polynôme minimal de u, alors la famille $(u^k)_{0\leqslant k\leqslant d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$.
Si P annule u, toute valeur propre de u est racine de P.
Théorème de Cayley-Hamilton.

Pour M dans $\mathbb{K}[X]$, morphisme $P \mapsto P(M)$ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Le polynôme minimal est unitaire.
Si $u(x) = \lambda x$, alors $P(u)(x) = P(\lambda)\cdot x$.

h) Lemme de décomposition des noyaux

Si $P_1, \dots, P_r$ sont des éléments de $\mathbb{K}[X]$, deux à deux premiers entre eux de produit égal à P, alors :

$$\ker(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker(P_i(u)).$$

i) Polynômes annulateurs et diagonalisabilité

Contenus	Capacités & commentaires
Un endomorphisme u est diagonalisable si et seulement s'il existe un polynôme scindé à racine simples annulant u, ou encore si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples. Polynôme minimal d'un endomorphisme induit. Diagonalisabilité d'un endomorphisme nilpotent.	Traduction matricielle

j) Endomorphisme à polynôme minimal scindé

Contenus	Capacités & commentaires
S'il existe un polynôme scindé annulant u, décomposition de E en somme directe de sous espaces stables par u sur chacun desquels u induit la somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent.	Traduction matricielle.

I — Changements de bases

1) Changement de base(s) en dimension finie

Matrice de changement de base *(1)*

(1) : *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ (dite ancienne base) vers la base $\mathcal{B}'$ (dite nouvelle base) est la matrice carrée d'ordre n dont la j-ième colonne est constituée des coordonnées du j-ième vecteur de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$. Cette matrice est inversible comme matrice dans la base $\mathcal{B}$ de l'endomorphisme de E qui transforme $\mathcal{B}$ en $\mathcal{B}'$.* ***Notation :*** $\mathfrak{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$.
(2) : *C'est la matrice de la fonction identité de E exprimée dans le couple de bases ($\mathcal{B}'$ -départ- , $\mathcal{B}$ -arrivée-).*

Effet du changement de base sur les matrices d'un vecteur *(2)*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et x un vecteur de E. On note $X = Mat_{\mathcal{B}}(x) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ le vecteur colonne des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$, $X' = Mat_{\mathcal{B}'}(x) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ le vecteur colonne des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}'$ et $P = \mathfrak{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.

Alors $X = PX'$.

Effet du changement de base sur les matrices d'une application linéaire *(3)*

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimensions finies p et q et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
$\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de F.On note :

- *$A = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$,*
- *$B = Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f) \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$,*
- *$P = \mathfrak{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$*
- *$Q = \mathfrak{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'} \in \mathrm{GL}_q(\mathbb{K})$ la matrice de passage de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$.*

Alors $B = Q^{-1}AP$.

$$\begin{tikzcd}
(E,\mathcal{B}) \arrow[r, "A", "f"'] & (F,\mathcal{C}) \arrow[d, "Q^{-1}=\mathfrak{P}_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}}", "id_F"'] \\
(E,\mathcal{B}') \arrow[u, "\mathfrak{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}=P", "id_E"'] \arrow[r, "f", "B"'] & (F,\mathcal{C}')
\end{tikzcd}$$

Changement de base sur les endomorphismes *(4)*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases de E et $f \in \mathcal{L}(E)$. On note :

- *$A = Mat_{\mathcal{B}} f \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$,*
- *$B = Mat_{\mathcal{C}} f \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$*
- *$P = \mathfrak{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$.*

Alors $B = P^{-1}AP$.

$$\begin{tikzcd}
(E,\mathcal{B}) \arrow[r, "A", "f"'] & (E,\mathcal{B}) \arrow[d, "P^{-1}=\mathfrak{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}", "id_F"'] \\
(E,\mathcal{C}) \arrow[u, "\mathfrak{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}=P", "id_E"'] \arrow[r, "f", "B"'] & (E,\mathcal{C})
\end{tikzcd}$$

II — Sous espaces stables, somme directes de s.e.v.

1) Sous espaces stables d'un endomorphisme

Définitions : sous-espaces stables *(5)*

Soit $E = F \oplus G$ et $\mathcal{B}$ une base de E adaptée à cette décomposition. Alors :
(1) : *F est stable par $f \in \mathcal{L}(E) \Leftrightarrow f(F) \subset F \Leftrightarrow Mat_{\mathcal{B}}(f)$ est triangulaire supérieure par blocs avec un découpage correspondant à celui de $\mathcal{B}$.*
(2) : *F et G sont stables par $f \Leftrightarrow Mat_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale par blocs.*

Caractérisation : drapeaux, matrices triangulaires, matrices diagonales *(6)*

Le drapeau associé à une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est la suite strictement croissante de sous espaces vectoriels $(F_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ où $F_i = \langle e_1, \dots, e_i\rangle$.
(1) : *Un endomorphisme stabilise ce drapeau si et seulement si sa matrice dans $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure.*
(2) : *Un endomorphisme stabilise chaque droite $\langle e_i\rangle$ si et seulement si sa matrice dans $\mathcal{B}$ est diagonale.*

Exemples : Dérivation et translation *(7)*

Soit le drapeau $(F_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ associée à la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_n[X]$.
(1) : *L'endomorphisme de dérivation stabilise ce drapeau.*
(2) : *l'endomorphisme $P \mapsto P(X+1)$ également.*
(3) : *Donner l'exemple d'un endomorphisme qui ne stabilise pas ce drapeau.*

2) Somme directe de sous-espaces vectoriels

Définition d'une somme directe d'une famille de sous-espaces *(8)*

(1) : *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, et $(E_i)_{i\in [\![1\,,\,n]\!]}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E.*
On dit que la somme des sous-espaces (E_i) est **directe** *lorsque pour tout vecteur x de $\sum_{i=1}^n E_i$, il existe un* **unique** *$(x_1, \dots, x_n)$ appartenant à $E_1 \times \cdots \times E_n$ tel que $x = x_1 + \cdots + x_n$.*
Notation : *$E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$ ou encore $\oplus_{i\in [\![1\,,\,n]\!]} E_i$.*
(2) : *Lorsque de plus $\oplus_{i\in [\![1\,,\,n]\!]} E_i = E$, on dit que les espaces sont* **supplémentaires**.

Théorème de caractérisation d'une somme directe *(9)*

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, et $(E_i)_{i\in [\![1\,,\,n]\!]}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E.
La somme des sous-espaces $(E_i)_{i\in [\![1\,,\,n]\!]}$ est directe si et seulement si pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$, si $x_1 + \cdots + x_n = 0$ alors pour tout $i \in [\![1\,,\,n]\!]$, $x_i = 0$.

Exemples *(10)*

(1) : *Fonctions paires et impaires : on note $P_{\mathbb{R}}$ l'ensemble des fonctions paires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $I_{\mathbb{R}}$ l'ensemble des fonctions impaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Alors $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = P_{\mathbb{R}} \oplus I_{\mathbb{R}}$.*
(2) : *Contre exemple : 3 droites distinctes dans $\mathbb{R}^2$ sont 2 à 2 en somme directe, mais ne le sont pas dans leur ensemble.*

Définition : base adaptée à une famille d'espaces supplémentaires *(11)*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $(E_i)_{i\in [\![1\,,\,n]\!]}$ une famille de sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. On appelle base de E **adaptée** *à cette décomposition en supplémentaires toute base $\boldsymbol{\mathcal{B}} = \bigcup_{i\in [\![1\,,\,n]\!]} \boldsymbol{\mathcal{B}}_i$ de E telle que pour tout i de $[\![1\,,\,n]\!]$, $\boldsymbol{\mathcal{B}}_i$ est une base de E_i.*

Définition : base adaptée à un sous espace *(12)*

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E, toute base de E dont les premiers vecteurs constituent une base de F est dite **adaptée** *à F.*

1) Éléments propres d'un endomorphisme

Définitions : valeur, vecteur propre, spectre, espace propre *(13)*

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, $f \in \mathcal{L}(E)$.
(1) : *On appelle* **vecteur propre** *de f tout vecteur* **non nul** *x de E pour lequel il existe un scalaire λ_x de $\mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda_x x$. Ce scalaire λ_x est alors déterminé de manière unique et appelé* **valeur propre** *associée au vecteur propre x.*
(2) : *On appelle* **spectre** *de f l'ensemble des valeurs propres de f.* ***Notation :*** $\mathrm{Sp}(f)$.
(3) : *Alors $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$ si et seulement si $f - \lambda\,\mathrm{id}_E$ n'est pas injective.*
(4) : *Si $x \in E \setminus \{0\}$, x est vecteur propre de f si et seulement si la droite Vect(x) est stable par f.*
(5) : *En dimension finie, les valeurs propres d'un endomorphisme sont exactement les valeurs propre de toute matrice carrée représentant cet endomorphisme dans une base de E.*
(6) : *On appelle* **sous-espace propre** *associé à λ le sous-espace vectoriel* $\mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{id}_E)$. ***Notation :*** $E_\lambda(f)$.

Exemples : *(14)*

(1) : *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :*
- *si h est une homothétie de rapport λ alors $\mathrm{Sp}(h) = \{\lambda\}$ et $E_\lambda(h) = E$,*
- *si p est un projecteur* **non trivial** *de E alors $\mathrm{Sp}(p) = \{1, 0\}$ et $E_1(p) = \mathrm{Im}\,p$, $E_0(p) = \mathrm{Ker}\,p$*
- *si s est une symétrie vectorielle* **non triviale** *de E par rapport à F parallèlement à G, alors $\mathrm{Sp}(s) = \{1, -1\}$ et $E_1(s) = F$ et $E_{-1}(s) = G$.*

(2) : *Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Quelles sont les valeurs propres de $\delta \in \mathcal{L}(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$ telle que $\delta : f \mapsto f'$?*
(3) : *Quelles sont les valeurs propres de l'opérateur de dérivation dans $\mathbb{C}[X]$? Et celui de primitivation ?*

Théorème : les sous-espaces propres sont en somme directe *(15)*

(1) : *Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont des valeurs propres de f* **distinctes** *alors les sous-espaces propres associés sont en* **somme directe**.
(2) : *Toute famille de vecteurs propres associée à des valeurs propres distinctes est libre.*
(3) : *Si $\dim(E) = n$, $f \in \mathcal{L}(E)$ admet* **au plus** *n valeurs propres distinctes. Si le spectre est de cardinal n, chaque sous espace propre est une* **droite** *propre.*

Exemples importants : *(16)*

(1) : *Montrer en particulier que la famille $(x \mapsto e^{\alpha x})_{\alpha \in \mathbb{R}}$ est libre.*
(2) : *Même question pour $(x \mapsto \cos(\alpha x))_{\alpha > 0}$ et $(x \mapsto \sin(\alpha x))_{\alpha > 0}$ sont libres dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.*

Les espaces propres sont stables par les endomorphismes du commutant *(17)*

(1) : *Les sous-espaces propres de $f \in \mathcal{L}(E)$ sont stables par f.*
La restriction de f à $E_\lambda(f)$ est une homothétie.
(2) : *Plus généralement, si f et g sont deux endomorphismes de E qui commutent, alors les sous-espaces propres de f sont stables par g.*

Spectre et polynômes d'un endomorphisme *(18)*

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, $f \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$ associée à x un vecteur propre de f et P un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$.
(1) : *Alors $P(\lambda)$ est une valeur propre associée au vecteur propre x de $P(f)$*, i.e. $P(f)(x) = P(\lambda) \cdot x$.
(2) : *Si P est un polynôme annulateur de f, alors toute valeur propre λ de f est une racine de P* i.e. $P(\lambda) = 0$.
Attention : *la réciproque est fausse en général.*

Théorème : Polynôme caractéristique en dimension finie *(19)*

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.
(1) : *Les valeurs propres de f sont exactement les racines dans $\mathbb{K}$ de χ_f.*
(2) : *Si F est un sev stable par f alors $\chi_{f|F} \mid \chi_f$.*
(3) : *En particulier, si λ est racine de χ_f de multiplicité m_λ alors $\dim(E_\lambda) \leqslant m_\lambda$.*

Cas d'un polynôme caractéristique scindé *(20)*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$.
On suppose que χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$.
Alors, si on note m_λ l'ordre de multiplicité d'une valeur propre λ de f, on a :
(1) : $\chi_f = \displaystyle\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} (X - \lambda)^{m_\lambda}$,
(2) : $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} m_\lambda = \dim E$,
(3) : $\mathrm{Tr}(f) = \displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} m_\lambda \cdot \lambda$,
(4) : $\det(f) = \displaystyle\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \lambda^{m_\lambda}$,

2) Diagonalisation, trigonalisation en dimension finie

Définitions : *(21)*

(1) : *$f \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable (resp. trigonalisable) s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale (resp. triangulaire supérieure).*
(2) : *$M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable (resp. trigonalisable) si l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à M l'est, c'est à dire si M est semblable à une matrice diagonale (reps. triangulaire supérieure).*

Remarques : *(22)*

(1) : *$Mat_{(e_1,\dots,e_n)}(f)$ est triangulaire supérieure si et seulement si $Mat_{(e_n,\dots,e_1)}(f)$ est triangulaire inférieure. Le caractère* **supérieur** *dans la définition de la trigonalisabilité est donc non restrictif.*
(2) : *Pour toute base $\mathcal{B}$ de E, on a : f est diagonalisable (resp. trigonalisable) si et seulement si $Mat_{\mathcal{B}}(f)$ a cette propriété.*

Exemples de travaux demandés : *(23)*

(1) : *Diagonaliser f consiste à trouver une base $\mathcal{B}$ pour laquelle $D = Mat_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale. Les vecteurs de $\mathcal{B}$ sont donc des vecteurs propres de f et les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres associées aux vecteurs de $\mathcal{B}$, dans le même ordre. Ce sont* **les** *valeurs propres de f. $\mathcal{B}$ est appelée* **base de diagonalisation de** *f ou* **base propre pour** *f. Il n'y a en général pas unicité de $\mathcal{B}$ ni de D, mais $\chi_f = \chi_D$ donc χ_f doit être scindé et D est unique à permutation de la diagonale près.*
(2) : *Diagonaliser M consiste à trouver $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et D diagonale telles que $P^{-1}MP = D$, soit $MP = PD$ ou encore $M = PDP^{-1}$. Les colonnes de P forment une base de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ propre pour l'endomorphisme canoniquement associé à M et les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres correspondantes, placées dans le même ordre que le sont les vecteurs propres dans P.*
(3) : *Trigonaliser f consiste à trouver une base $\mathcal{B}$ pour laquelle $T = Mat_{\mathcal{B}}(f)$ est triangulaire supérieure. Le premier vecteur de $\mathcal{B}$ est donc vecteur propre de f, et le drapeau associé à $\mathcal{B}$ est stable par f. Comme $\chi_f = \chi_T$, il est nécessaire que χ_f soit scindé pour que f soit trigonalisable. La diagonale de T est imposée à permutation près par la connaissance de χ_f ; les coefficients au dessus de la diagonale ne peuvent être déterminés que connaissant explicitement P.*
(4) : *Trigonaliser M consiste à trouver $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et T triangulaire supérieure telles que $P^{-1}MP = T$, soit $MP = PT$ ou encore $M = PTP^{-1}$.*

Méthode pour diagonaliser ou trigonaliser f donnée : *(24)*

(1) : *Calculer χ_f et le factoriser. Si χ_f n'est pas scindé, la réduction demandée est impossible. Dans ce cas, abandonner ou prendre $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.*
(2) : *Pour chaque racine λ de χ_f, déterminer une base du sous-espace propre E_λ. Lorsque $m_\lambda = 1$, il suffit de trouver un vecteur propre non nul.*
(3) : *Concaténer les bases trouvées en (ii). On obtient une base de la somme de tous les sous-espaces propres, c'est-à-dire une famille $\mathcal{F}$ libre propre maximale.*
(4) : *Si la famille $\mathcal{F}$ est de cardinal n alors c'est une base propre pour f et la diagonalisation est terminée. Sinon, f n'est pas diagonalisable.*
(5) : *Si $\mathrm{Card}(\mathcal{F}) = n-1$, compléter $\mathcal{F}$ en une base $\mathcal{B}$ de E par ajout en dernière position d'un vecteur non combinaison linéaire de $\mathcal{F}$. Alors $Mat_{\mathcal{B}}(f)$ est triangulaire supérieure.*
(6) : *Si $\mathrm{Card}(\mathcal{F}) \leqslant n-2$, compléter arbitrairement $\mathcal{F}$ en une base $\mathcal{B}$ et calculer $M' = Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} D & X \\ 0 & N \end{pmatrix}$ où D est diagonale et N carrée quelconque de taille strictement inférieure à n (car on a au moins une valeur propre du fait que χ_f est scindé). Trigonaliser récursivement N. On obtient Q inversible et T triangulaire supérieure telles que $NQ = QT$. Soit alors $P = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$: c'est une matrice $n \times n$ inversible et $M'P = P\begin{pmatrix} D & XQ \\ 0 & T \end{pmatrix}$. La trigonalisation de f est terminée.*

Remarques : *(25)*

(1) : *La récursion en (6) est bien fondée car χ_f est scindé donc χ_N qui en est un diviseur est aussi scindé.*
(2) : *En (4) on a $\mathrm{Card}(\mathcal{F}) = n \Longleftrightarrow E = \bigoplus_\lambda E_\lambda \Longleftrightarrow n = \sum_\lambda \dim(E_\lambda) \Longleftrightarrow \forall\, \lambda, \dim(E_\lambda) = m_\lambda$ car le caractère scindé de χ_f donne $n = \sum_\lambda m_\lambda$ et on sait que $m_\lambda \geqslant \dim(E_\lambda)$.*

Conséquences - résultats TRÈS importants - compléments aux paragraphes (34) et (35) *(26)*

(1) : *Un endomorphisme f est trigonalisable si et seulement si χ_f est scindé.*
(2) : *Tout endomorphisme est donc toujours trigonalisable dans $\mathbb{C}$.*
(3) : *Un endomorphisme f est diagonalisable si et seulement si la somme des sous-espaces propres est égale à E (version géométrique).*
(4) : *Un endomorphisme f est diagonalisable si et seulement si χ_f est scindé et si pour toute racine λ de χ_f, on a $\dim(E_\lambda) = m_\lambda$ (version algébrique).*
(5) : *En particulier,* **si** *χ_f est scindé* **à racines simples alors** *f est diagonalisable (réciproque fausse).*
(6) : *Si f n'a qu'une seule valeur propre λ alors f est diagonalisable* **si et seulement si** $f = \lambda\, \mathrm{id}$.

Exemples : *(27)*

$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 6 \\ -1 & 3 & -2 \\ -6 & 11 & -8 \end{pmatrix}$

(si demandés, les calculs de P^{-1} pour une matrice de taille $\leqslant 3$ peuvent se faire par comatrice)

3) Polynômes d'un endomorphisme

Polynôme minimal d'un endomorphisme en dimension quelconque *(28)*

Pour E de dimension quelconque et $f \in \mathcal{L}(E)$, on définit $\mathbb{K}[f] = \{P(f)$ tel que $P \in \mathbb{K}[X]\}$ et l'idéal annulateur $I_f = \{P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(f) = 0\}$. Ces définitions prolongent celles vues pour les matrices carrées et les endomorphismes d'un ev de dimension finie non nulle. On dit que f admet un polynôme minimal si $I_f \neq \{0\}$ et dans ce cas, μ_f est le générateur unitaire de I_f.

Exemples : *(29)*

homothétie, projection, symétrie, dérivation dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 1 : Autour de la sous-algèbre commutative $\mathbb{K}[f]$

En s'inspirant des démonstrations des résultats sur $\mathbb{K}[M]$ pour une matrice carrée M, montrer que

1. $\mathbb{K}[f]$ *est une sous-algèbre commutative de* $\mathcal{L}(E)$.
2. *Si* μ_f *existe et* $d = \deg(\mu_f)$ *alors* $(\mathrm{id}, \ldots, f^{d-1})$ *est une base de* $\mathbb{K}[f]$ *et* $\dim(\mathbb{K}[f]) = d$.
   De plus, pour $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, *on a* $P(f) = Q(f) \Longleftrightarrow \mu_f \mid (P - Q)$.
3. *Si* μ_f *n'existe pas* ($I_f = \{0\}$), $\mathbb{K}[f]$ *est de dimension infinie*
   Alors deux polynômes en f *sont égaux si et seulement s'ils ont mêmes coefficients.*

Théorème *(30)*

(1) : *Si* $\lambda \in Sp(f)$ *et* $P \in \mathbb{K}[X]$ *alors* $P(\lambda) \in Sp(P(f))$ *et* $\mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{id}) \subset \mathrm{Ker}(P(f) - P(\lambda)\,\mathrm{id})$.

(2) : *En particulier, si* $P(f) = 0$ *alors* $Sp(f)$ *est inclus dans l'ensemble des racines de* P.

(3) : *Si* f *admet un polynôme minimal alors* $Sp(f)$ *est fini (réciproque fausse).*

Lemme des noyaux : *(31)*

Soient $P_1, \ldots, P_k$ *des polynômes deux à deux premiers entre eux et* $P = P_1 \ldots P_k$.
Alors $\mathrm{Ker}\, P(f) = \bigoplus_i \mathrm{Ker}\, P_i(f)$.

Remarque : *(32)*

les projecteurs associés à la décomposition $\mathrm{Ker}\, P(f) = \bigoplus_i \mathrm{Ker}\, P_i(f)$ *sont des polynômes en* f.

Application : équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants : *(33)*

Soient $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ *avec* $a_n \neq 0$. *On considère l'équation différentielle :* $(*) \Longleftrightarrow a_0 y + \cdots + a_n y^{(n)} = 0$ *d'inconnue* $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *supposée de classe* $\mathcal{C}^n$. *Soit* $P = a_0 + \cdots + a_n X^n$ *(polynôme caractéristique de l'équation).*
Si P *admet* n *racines simples* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *alors les solutions de l'équation* $(*)$ *sont les fonctions de la forme* $y = x \mapsto A_1 e^{\alpha_1 x} + \cdots + A_n e^{\alpha_n x}$ *avec* $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{C}$ *quelconques.*
Dans le cas général, soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ *les racines de* P *sans répétition et* $m_1, \ldots, m_k$ *leurs multiplicités. Les solutions sont les fonctions de la forme* $y = x \mapsto A_1(x) e^{\alpha_1 x} + \cdots + A_k(x) e^{\alpha_k x}$ *avec* $A_i \in \mathbb{C}_{m_i - 1}[X]$ *quelconque.*
Pour y *donnée, il y a unicité d'une telle décomposition et l'ensemble des solutions est un* $\mathbb{C}$*-ev de dimension* n.

Théorème : caractérisations de la trigonalisabilité : *(34)*

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-ev de dimension finie non nulle et* $f \in \mathcal{L}(E)$. *Il y a équivalence entre :*

(1) : f *est trigonalisable*

(2) : *il existe* $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ *scindé tel que* $P(f) = 0$

(3) : μ_f *est scindé.*

Théorème : caractérisations de la diagonalisabilité : *(35)*

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-ev de dimension finie non nulle et* $f \in \mathcal{L}(E)$. *Il y a équivalence entre :*

(1) : f *est diagonalisable*

(2) : $(f - \lambda_1\,\mathrm{id}) \circ \cdots \circ (f - \lambda_p\,\mathrm{id}) = 0$ *où* $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ *sont les valeurs propres de* f *sans répétition*

(3) : *il existe* $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ *scindé à racines simples tel que* $P(f) = 0$

(4) : μ_f *est scindé à racines simples*

Conséquences : *(36)*

Soit f *diagonalisable (resp. trigonalisable) et* F *un sev non nul stable par* f. *Alors* $f_{|F}$ *est diagonalisable (resp. trigonalisable). Dans le cas diagonalisable, un sous-espace de* E *est stable par* f *si et seulement s'il est engendré par une famille finie de vecteurs propres.*

4) Endomorphismes nilpotents

Définitions : *(37)*

Soit E un espace vectoriel. Soit $f \in \mathcal{E}$.
(1) : *On dit que f est* **nilpotent** *si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^n = O_{\mathcal{L}(E)}$.*
(2) : *L'ensemble $A = \{n \in \mathbb{N}^* | f^n = 0\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$, donc admet un plus petit élément. On appelle cet élément* **l'indice de nilpotence de** *f.*
(3) : *L'indice de nilpotence n_0 de f vérifie donc $f^{n_0} = 0$ et $f^{n_0 - 1} \neq 0$.*
(4) : *Le polynôme X^{n_0} est donc un polynôme annulateur de f.*

Exercice 2 : Rappels :

(1) : *(du Newton...) Montrer que la somme de deux éléments nilpotents qui commutent est nilpotente.*
(2) : *Montrer que si f est nilpotent d'indice p alors la suite $(\operatorname{Ker} f^k)_{0 \leqslant k \leqslant p}$ est strictement croissante jusqu'à E*

Théorème *(38)*

Si E est de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent, alors l'indice de nilpotence de f est majoré par n et on a $f^n = 0$.

Théorème : caractérisation des matrices nilpotentes : *(39)*

(1) : *Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ il y a équivalence entre*
(i) M *est nilpotente*
(ii) M *est semblable à une matrice triangulaire supérieure dont la diagonale est nulle*
(iii) $\chi_M = X^n$

Exercice 3 : Un classique

Montrer que M est nilpotente si et seulement si $\forall\, k \in [\![1, n]\!]$, $Tr\ (M^k) = 0$.
(on commencera par montrer que pour tout polynôme $P \in X\mathbb{K}_{n-1}[X]$, $Tr\ (P(M) = 0)$.

Pratique : trigonalisation forte : *(40)*

Soit E un ev de dimension finie non nulle, $f \in \mathcal{L}(E)$ trigonalisable, $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres de f de multiplicités $m_1, \ldots, m_p$. Alors il existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs : $Mat_{\mathcal{B}}(f) = Diag(T_1, \ldots, T_p)$ où T_i est une matrice triangulaire supérieure de taille m_i ayant λ_i pour unique valeur propre : $T_i = \lambda_i I_{m_i} + N_i$ avec $N_i^{m_i} = 0$.

5) Calcul des puissances d'une matrice carrée

Exercice 4 : Par un polynôme annulateur

On rappelle qu'une méthode classique pour calculer la puissance M^p d'une matrice M consiste à déterminer un polynôme annulateur de "petit" degré A puis d'utiliser la division euclidienne de X^p par A. En substituant la matrice M à l'indéterminée X ; on obtient que $M^p = 0 + R(M)$ où $deg(R) < deg(A)$ est facile à déterminer en résolvant un système.

Exemple : Calculer M^p pour $p \in \mathbb{N}$ et $M = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

Par trigonalisation forte ou diagonalisation *(41)*

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On veut calculer M^p en fonction de $p \in \mathbb{N}$ arbitraire.

(1) : *Si $M = Diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$: $M^p = Diag(\lambda_1^p, \ldots, \lambda_n^p)$.*
(2) : *Si M est diagonalisable : $M = PDP^{-1}$, puis $M^p = PD^pP^{-1}$.*
(3) : *Si $M = \lambda I_n + N$ avec N nilpotente d'indice q : $M^p = \lambda^p I_n + p\lambda^{p-1}N + \cdots + \binom{p}{q-1}\lambda^{p-q+1}N^{q-1}$.*
(4) : *Sinon, voir M comme une matrice complexe : trigonaliser fortement M puis utiliser la formule du binôme pour chaque bloc.*

Théorème : *(42)*

Le calcul explicite de M^p est donc toujours possible et M^p est une combinaison linéaire à coefficients matriciels des suites $(\lambda^p p^k)$ où $\lambda \in Sp(M) \setminus \{0\}$ et $0 \leqslant k < m_\lambda$ et d'une suite presque nulle si $0 \in Sp(M)$.

Exemples : *(43)*

$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, *Sp*$(M) = \{0, 2\}$ *et M est diagonalisable. Donc $M^p = 2^{p-1}M$ pour tout $p \geqslant 1$.*

$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$, *Sp*$(M) = \{4\}$, $M^p = 4^p I_3 + p4^{p-1}(M - 4I_3) + \dfrac{p(p-1)}{2} 4^{p-2}(M - 4I_3)^2$.

$M = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 6 \\ -1 & 3 & -2 \\ -6 & 11 & -8 \end{pmatrix}$, *Sp*$(M) = \{i, -i, 0\}$, *la suite $(M^p)_{p \geqslant 1}$ est 4-périodique.*

Théorème : convergence *(44)*

(1) : *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. La suite de terme général M^p converge vers la matrice nulle si et seulement si Sp$(M) \subset \mathring{D} = \{z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1\}$.*
(2) : *La suite (M^p) est convergente si et seulement si Sp$(M) \subset \mathring{D} \cup \{1\}$ et $\operatorname{rg}(M - I_n) = \operatorname{rg}((M - I_n)^2)$. Dans ce cas, sa limite L est la matrice de la projection sur $\operatorname{Ker}(M - I_n)$ parallèlement à $\operatorname{Im}(M - I_n)$ (en confondant une matrice avec son application linéaire canoniquement associée).*

Théorème : suites récurrentes linéaires : *(45)*

Soient $a_0, \ldots, , a_n \in \mathbb{C}$ avec $a_0 a_n \neq 0$. On considère l'équation de récurrence linéaire :

$$(*) \Longleftrightarrow a_0 u_p + \cdots + a_n u_{n+p} = 0$$

d'inconnue $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Soit $P = a_0 + \cdots + a_n X^n$ (polynôme caractéristique de l'équation).
Si P admet n racines simples $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ alors les solutions de l'équation $(*)$ sont les suites de la forme $u = (A_1\alpha_1^p + \cdots + A_n\alpha_n^p)_{p\in\mathbb{N}}$ avec $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{C}$ quelconques.
Dans le cas général, soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ les racines de P sans répétition et $m_1, \ldots, m_k$ leurs multiplicités. Les solutions sont les suites de la forme $u = (A_1(p)\alpha_1^p + \cdots + A_k(p)\alpha_k^p)_{p\in\mathbb{N}}$ avec $A_i \in \mathbb{C}_{m_i-1}[X]$ quelconque. Pour u donnée, il y a unicité d'une telle décomposition et l'ensemble des solutions est un $\mathbb{C}$-ev de dimension n.

6) Système différentiel d'ordre 1

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On considère l'équation : $(*) \Longleftrightarrow X' = MX$ d'inconnue $X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ supposée dérivable. L'objectif est de calculer explicitement $X(t)$ en fonction de $t \in \mathbb{R}$. Remarquer qu'une solution est nécessairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que l'ensemble des solutions est stable par dérivation.

Si $M = \operatorname{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$: $X(t) = {}^t(e^{\lambda_1 t}x_1(0), \ldots, e^{\lambda_n t}x_n(0))$.

Si M est diagonalisable : $M = PDP^{-1}$. Poser $Y = P^{-1}X$, d'où $Y' = DY$ puis $X = PY$.

Si M est nilpotente d'indice q : $X(t) = (I_n + \cdots + (tM)^{q-1}/(q-1)!)X(0)$.

Si $M = \lambda I_n + N$ avec $\lambda \neq 0$ et N nilpotente d'indice q : $X(t) = e^{\lambda t}(I_n + \cdots + (tN/\lambda)^{q-1}/(q-1)!)X(0)$.

Dans le cas général : trigonaliser fortement M.

Théorème : *(46)*

Ainsi, l'équation $(*)$ admet toujours une solution, et cette solution est unique si l'on impose sa valeur en $t = 0$ (ou en $t = t_0$ fixé). En particulier l'ensemble des solutions est un $\mathbb{C}$-ev de dimension n et pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, l'application $X \mapsto X(t_0)$ est un isomorphisme de cet ensemble sur $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{C})$. De plus, X est combinaison linéaire à coefficients matriciels des fonctions $t \to t^k e^{\lambda t}$ avec $\lambda \in Sp(M)$ et $0 \leqslant k < m_\lambda$.

Exemple : *(47)*

$M = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 6 \\ -1 & 3 & -2 \\ -6 & 11 & -8 \end{pmatrix}$, $X(t) = X_0 + (\cos t)X_1 + (\sin t)X_2$ *avec* $MX_0 = 0$, $X_2 = -MX_1$ *et* $M^2X_1 = -X_1$.
On obtient $X_0 = {}^t(-2a, 4a, 7a)$, $X_1 = {}^t(b-c, b, c)$, $X_2 = {}^t(c-3b, 2b-c, 5b-2c)$.

Système différentiel d'ordre 2 : *(48)*

$X'' = MX + NX' \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} X \\ X' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ X' \end{pmatrix}$.

Applications du cours

Exercice 5 : Autour de d'Alembert-Gauss

Montrer qu'un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$*-ev de dimension finie non nulle admet au moins une valeur propre.*
Que dire d'un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$*-ev de dimension finie impaire ?*

Exercice 6 : Cas d'endomorphisme de rang réduit

(1) : *Montrer que si* $\mathrm{rg}(f) = r < n = \dim(E)$ *alors* $X^{n-r} \mid \chi_f$.
(2) : *Que se passe-t-il en particulier lorsque* $\mathrm{rg}(f) \leqslant 1$ *?*

Exercice 7 : Diagonalisabilité et commutant

Montrer que :
(1) : *lorsque f est diagonalisable, un endomorphisme g commute avec f si et seulement s'il stabilise tous les sous-espaces propres pour f.*
(2) : *lorsque f est diagonalisable à valeurs propres distinctes, un endomorphisme g commute avec f si et seulement s'il est diagonalisable dans une base propre pour f fixée.*
Justifier que dans ce cas, $g \in \mathbb{K}[f]$.

Réduction

Exercice 8 : Commuter et espaces stables

Montrer que si f et g commutent, $Im(f)$ *et* $\mathrm{Ker}\, f$ *sont stables par g.*
Montrer que f commute avec un projecteur p si et seulement si $Im(p)$ *et* $\mathrm{Ker}\, p$ *sont stables par f.*

Exercice 9 : Matrices semblables

(1) : *Soit* $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *telle que* $A^2 = 0$ *et* $A \neq 0$. *Montrer que* A *est semblable à* $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(2) : *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que* $A^{n-1} \neq 0$ *et* $A^n = 0$.

Montrer que A *est semblable à la matrice* $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}$

(3) : *Les matrices* $\begin{pmatrix} 3 & 6 & -2 & 3 \\ -2 & -6 & 2 & -5 \\ -1 & -3 & 8 & 10 \\ 10 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ *sont elles semblables ?*

(4) : *Soit* $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. *Montrer en distinguant les cas que* A *et* ${}^tA$ *sont semblables.*
Rq : c'est encore vrai en dimension quelconque, mais plus difficile à démontrer.

Exercice 10 : Equation matricielle

Résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *l'équation* $X^2 = A$ *où* $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *puis* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & 6 & -14 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$.

Exercice 11 : Puissance d'une matrice trigonalisable

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix}$.

1. *Vérifier que* A *n'est pas diagonalisable.*
2. *Déterminer* $Ker(A - I)^2$.
3. *Montrer que* A *est semblable à une matrice de la forme* $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$
4. *Calculer* A^n *pour* n *entier naturel donné.*

Exercice 12 : Récurrences imbriquées

Soit $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ *et* $u_{n+1} = au_n + bv_n$ *et* $v_{n+1} = cu_n + dv_n$ *pour* $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. *On pose* $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

(1) : *Donner les valeurs de* u_n *et* v_n *en fonction de* n *lorsque* $(a, b, c, d) = (3, 2, 1, 2)$.

(2) : *Même question avec* $(a, b, c, d) = (a, 1/2, 1/2, a)$ *lorsque* $|a| < 1/2$.

(3) : *On suppose* $(a, b, c, d) = (1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$. *Pour quelles valeurs de* u_0 *et* v_0 *les deux suites convergent-elles toutes les deux vers 0 ?*

Diagonalisabilité ?

Exercice 13 : Transposition

Soit T *l'endomorphisme de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *telle que* $T(M) = {}^t M$.
Montrer que T *est diagonalisable et déterminer ses éléments propres.*
Que dire de l'endomorphisme ϕ *tel que* $\phi(M) = M + {}^t M$ *?*

Exercice 14 : Equation différentielle

Soit f *qui à* P *élément de* $\mathbb{R}_{2n}[X]$ *associe* $f(P) = (X^2 - 1)P' - 2nXP$.
Vérifier que f *est un endomorphisme de* $\mathbb{R}_{2n}[X]$ *puis déterminer les valeurs et vecteurs propres de* f. f *est-il diagonalisable ?*

Exercice 15 : Division euclidienne (le retour)...

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. Pour P élément de E, soit $f(P)$ le reste de la division euclidienne de AP par B où $A = X^4 - 1$ et $B = X^4 - X$.
Vérifier que f est un endomorphisme de E puis déterminer $Kerf$, Imf et les valeurs et vecteurs propres de f.

Exercice 16 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 17 : Déterminant circulant

1. *Soit* $J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$ *(de format $n \geqslant 3$). Diagonaliser J_n.*

2. *En déduire la valeur de* $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & & a_{n-2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & & \ddots & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_0 \end{vmatrix}$.

Exercice 18 : Décomposition de Dunford

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et f un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$.
Montrer qu'il existe un couple d'endomorphismes (d, n) et un seul tel que d est diagonalisable, n est nilpotent, $d \circ n = n \circ d$ et $f = d + n$.

Valeurs propres

Exercice 19 : autour de f^n et f^{-1}

(1) : *Soient f un endomorphisme de E et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que 0 est une valeur propre de f^n. Montrer que 0 est valeur propre de f.*
(2) : *On suppose maintenant que f est bijectif. Montrer que $Sp(f^{-1}) = \{\lambda^{-1} | \lambda \in Sp(f)\}$.*

Exercice 20 : Le retour...

Que dire de f tel que tout vecteur non nul soit un vecteur propre ?

Exercice 21 : Matrices stochastiques

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, $a_{i,j} \in [0, 1]$ et $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$.

1. *Montrer que 1 est valeur propre de A.*

2. *Soit λ une valeur propre de A.*

  a. *Montrer que $|\lambda| \leqslant 1$.*

  b. *Montrer qu'il existe un réel ω de $[0, 1]$ tel que $|\lambda - \omega| \leqslant 1 - \omega$. Conséquence géométrique ?*

Autres

Exercice 22 :

Soit A une matrice telle que pour tout entier k, $Tr(A^k) = 0$. Montrer que A est nilpotente.

Exercice 23 :

Soit A une matrice à coefficients réels telle que $A^2 = -I_n$. Que dire de $tr(A)$?

Exercice 24 :

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et P un polynôme. Montrer que $P(f)$ est inversible si et seulement si P et χ_f sont premiers entre eux.

Exercice 25 :

Soit $M_{a,b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Peut-on trouver deux matrices distinctes semblables parmi les quatre matrices $M_{0,0}$, $M_{0,1}$, $M_{1,0}$ et $M_{1,1}$?

Exercice 26 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$ où a_1,..., a_n sont n nombres complexes ($n \geqslant 2$). A est-elle diagonalisable ?

Exercice 27 :

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A. Réduire f dans chacun des cas suivants (les calculs ont déjà été faits dans le chapitre précédent) :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 5 \\ -4 & -1 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 28 :

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie non nulle et F un sous-espace non nul de E stable par f. On suppose que f est diagonalisable. Montrer que la restriction de f à F est un endomorphisme diagonalisable de F.

Exercice 29 :

Soit A une matrice carrée réelle de format $n \geqslant 2$ vérifiant $A^3 + A^2 + A = 0$. Montrer que le rang de A est un entier pair.