Polynômes annulateurs

I — Polynôme caractéristique d'une matrice carrée

1) Définitions

Définition : valeur propre / espace propre / vecteur propre d'une matrice *(1)*

(1) : *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

- *$M - \lambda I_n$ est non inversible*
- $\mathrm{Ker}(M - \lambda I_n) \neq \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\}$
- *il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ NON NUL tel que $MX = \lambda X$*
- $\det(\lambda I_n - M) = 0$

Dans ce cas, on dit que λ est une valeur propre de M et

(2) : *On définit alors l'espace propre associé à λ par $E_\lambda = \mathrm{Ker}(M - \lambda I_n) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) | MX = \lambda X\}$.*

(3) : *On appelle vecteur propre tout élément de $E_\lambda \setminus \{0\}$.*

(4) : *On appelle spectre de M noté $Sp_{\mathbb{K}}(M)$ l'ensemble des valeurs propres de M (appartenant à $\mathbb{K}$).*

Définition : *(2)*

Soit M une matrice carrée de taille n.

(1) : *On définit son polynôme caractéristique par $\chi_M = \det(XI_n - M)$.*

(2) : *La forme développée est $\chi_M = \sum_{p=0}^{n} c_p X^p$ où $c_p \in \mathbb{K}$*

Propriétés : polynôme caractéristique et valeur propre *(3)*

(1) : *Le scalaire λ est une valeur propre de $M \Leftrightarrow \chi_M(\lambda) = 0$.*

(2) : *Une matrice de taille n admet au plus n valeurs propres distinctes.*

(3) : *Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet au moins une valeur propre (donc au moins un vecteur propre).*

(4) : *Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec n impair admet au moins une valeur propre réelle (donc au moins un vecteur propre)*

Propriétés : coefficients de χ_M : *(4)*

(1) : $c_n = 1$, $c_{n-1} = -Tr\,(M)$, $c_n = (-1)^n \det(M)$.

(2) : $\chi_M = X^n - Tr\,(M) X^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det(M)$ *(le polynôme caractéristique est unitaire)*

(3) : *Si $n = 2$, $\chi_M = X^2 - tr(M)X + det(M)$*

2) Exemples à connaître

Exemples *(5)*

(1) : *Pour une matrice scalaire : $\chi_{aI_n} = (X - a)^n$.*

(2) : *Pour une matrice triangulaire (en particulier diagonale) : $\chi_M = \prod_i (X - a_{ii})$.*

(3) : *Le polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire par blocs est le produit des polynômes caractéristiques des blocs diagonaux.*

(4) : $\chi_M = \chi_{{}^tM}$.

(5) : *Matrice compagne d'un polynôme unitaire : $\chi_M =$ le polynôme compagnon (voir exercice suivant).*

Exercice 1 : Polynôme compagnon :

Montrer que le polynôme caractéristique de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & & a_0 \\ 1 & 0 & \ddots & a_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

est égal à $X^n - (a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0)$ *:*

1. *en développant selon la première ligne.*

2. *en effectuant l'opération* $L_1 \leftarrow L_1 + XL_2 + \ldots + X^{n-1}L_n$.

3) Théorème de Cayley et Hamilton

Théorème de Cayley-Hamilton : *(6)*

Le polynôme caractéristique d'une matrice M est un polynôme annulateur de M, c'est à dire :

$$\chi_M(M) = \sum_{p=0}^{n} c_p M^p = 0.$$

II — Polynôme minimal d'une matrice carrée

1) Existence d'un polynôme annulateur et définition de μ_M.

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'application $P \mapsto P(M)$ est un morphisme d'algèbre de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (morphisme de substitution).
Son image, notée $\mathbb{K}[M]$, est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Son noyau, $I_M = \{P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(M) = 0\}$, est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ appelé *idéal annulateur de M.*

Exercice 2 : Polynôme annulateur

Justifier que la famille $(I_n, M, M^2, \ldots M^{n^2})$ est liée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
En déduire que $I_M \neq \{0\}$.

Définition du polynôme minimal : *(7)*

On vient de voir que $I_M \neq \{0\}$.
Donc I_M admet un unique **générateur unitaire** *noté μ_M et appelé* **polynôme minimal** *de M.*
Remarque : *d'après le théorème de Cayley-Hamilton, χ_M est un polynôme annulateur de M.*

Ainsi, $\mu_M \mid \chi_M$ *et* $1 \leqslant \deg(\mu_M) \leqslant n$.

Exemples à connaître : *(8)*

(1) : $\mu_{aI_n} = X - a$.
(2) : *Si $M = Diag(a_1, \ldots, a_n)$ alors $\mu_M = \prod_{a\in\{a_1,\ldots,a_n\}}(X - a)$ (racines simples).*
(3) : *Si M est triangulaire à coefficients diagonaux distincts alors $\mu_M = \chi_M = \prod_i (X - a_{ii})$.*
(4) : *Si M est diagonale par blocs alors μ_M est le ppcm des polynômes minimaux des blocs diagonaux.*

Autres exemples *(9)*

(1) : $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mu_M = X^2 + 1,$

(2) : $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mu_M = X^2 - X + 1.$

2) Propriétés

Propriétés : *(10)*

(1) : $\mu_M = \mu_{^tM}$.

(2) : *Pour* $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, *on a* $P(M) = Q(M) \Longleftrightarrow \mu_M \mid (P - Q)$.

Propriété d'inclusion : *(11)*

Si P *est un polynôme annulateur de* M, *le spectre de* M *est* **inclus** *dans l'ensemble des racines de* P.
Autrement dit, **si** λ *est une valeur propre de* M, **alors** $P(\lambda) = 0$.
Attention : *la réciproque est FAUSSE !*

Valeur propre et polynômes caractéristique et minimal *(12)*

(1) : *Soit* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

- λ *est une valeur propre de* M
- $\mu_M(\lambda) = 0$
- $\chi_M(\lambda) = 0$

Autrement dit, le spectre de M *est* **égal** *à l'ensemble des racines de* μ_M *et à l'ensemble des racines de* χ_M.

Exemple : *(13)*

Soit f *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *dont la matrice dans la base canonique est* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Calculer χ_A *puis trouver les valeurs propres puis les sous espaces propres de* f

Conséquence : *(14)*

si χ_M *est scindé à racines simples alors* $\mu_M = \chi_M$ *(réciproque fausse).*

Théorème : *(15)*

soit $d = \deg(\mu_M)$. *Alors* $(I_n, \dots, M^{d-1})$ *est une base de* $\mathbb{K}[M]$.
En particulier, $\dim \mathbb{K}[M] = \deg(\mu_M)$.

Polynôme caractéristique d'une matrice

Exercice 3 : Diagonalisation d'une matrice tri-diagonale (récurrence)

Soient

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ et } \chi_n(x) = \det(xI_n - A_n).$$

1. *Montrer*

$$\chi_n(x) = x\chi_{n-1}(x) - \chi_{n-2}(x).$$

Calculer $\chi_1(x)$ *et* $\chi_2(x)$.

2. *Pour tout* $x \in]-2\,;2[$, *on pose* $x = 2\cos\alpha$ *avec* $\alpha \in]0\,;\pi[$. *Montrer que*

$$\chi_n(x) = \frac{\sin((n+1)\alpha)}{\sin\alpha}.$$

3. *En déduire que* $\chi_n(x)$ *est scindé à racines simples.*
4. *En déduire qu'il existe une base de* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *constituée uniquement de vecteurs propres de* M.
5. *Quelle est la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à* M *dans cette base de vecteurs propres ?*

Exercice 4 :

Soit A *une matrice antisymétrique réelle. Etudier la parité de son polynôme caractéristique.*

Exercice 5 : Projection/Symétrie

Calculer le polynôme caractéristique d'une projection puis d'une symétrie.

Exercice 6 : Polynôme caractéristique de AB et BA

Soient $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *et* $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. *Établir l'égalité des polynômes caractéristiques*

$$\chi_{AB} = \chi_{BA}.$$

Montrer que AB *et* BA *ont même valeurs propres.*
Soit $p \in \mathbb{N}^*$. *Établir*

$$\chi_{(AB)^p} = \chi_{(BA)^p}.$$

Élements propres

Exercice 7 : Matrice inversible

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Montrer

$$0 \notin \mathrm{Sp}(A) \iff A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}).$$

On suppose que $0 \in \mathrm{Sp}(A^n)$.
Montrer que $0 \in \mathrm{Sp}(A)$.

Exercice 8 : Réduction

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A. Trouver les sous espaces propres par f dans chacun des cas suivants :

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 5 \\ -4 & -1 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}$.

3. $A = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$.

Réponse : $E_{-1} = Vect((1,1))$ *et* $E_1 = Vect((2,3))$.

Exercice 9 : Élements propres

Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$ pour $n \geqslant 2$. On pose $T : P \mapsto P(0) \cdot X^2$. Vérifier que T est un endomorphisme et déterminer ses valeurs propres et les s.e.v. propres associés.

Exercice 10 : Matrices de permutations

Pour $\sigma \in S_n$, $n \geqslant 2$, on définit la matrice P_σ par $P_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

1. *Calculer $\det(P_\sigma)$ pour tout $\sigma \in S_n$.*
2. **a.** *Montrer que $\forall (\sigma, \sigma') \in S_n^2$, $P_\sigma \times P_{\sigma'} = P_{\sigma \circ \sigma'}$.*

   b. *On pose $G = \{P_\sigma,\ \sigma \in S_n\}$. Montrer que $(G, \times)$ est un groupe isomorphe à S_n.*
3. *Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Calculer AP_σ.*
4. *Trouver les valeurs propres d'une matrice de permutation (on pourra utiliser le résultat hors programme : toute permutation se décompose de manière unique à l'ordre près des facteurs en produit de cycles à supports disjoints).*

Exercice 11 :

Soient A et B deux matrices carrées complexes de format n. Montrer que A et B n'ont pas de valeurs propres communes si et seulement si la matrice $\chi_A(B)$ est inversible.

Exercice 12 : Matrice magique

Une matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite magique s'il existe un réel s vérifiant

$$\forall i \in [\![1\,;n]\!], \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = s \text{ et } \forall j \in [\![1\,;n]\!], \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = s.$$

On note U la colonne $U = {}^t(1, \cdots, 1) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. *Montrer que la matrice A est magique si, et seulement si, il existe des réels λ et μ vérifiant*

   $$AU = \lambda U \text{ et } {}^tUA = \mu\, {}^tU.$$

   Que dire alors des réels λ et μ ?
2. *On introduit les espaces $D = \mathrm{Vect}(U)$ et $H = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que ${}^tUX = 0\}$.*
   Pourquoi peut-on affirmer que ces espaces sont supplémentaires ?
3. *Montrer qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est magique si, et seulement si, elle laisse stable les espaces D et H.*
4. *En déduire la dimension de l'espace de matrices magiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

Exercice 13 : Matrice nilpotente

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant

$$A^{n-1} \neq \mathrm{O}_n \text{ et } A^n = \mathrm{O}_n.$$

Établir que A est semblable à la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 14 : Matrice de rang 1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1.

1. *Montrer que A est semblable à une matrice dont les $n-1$ premières colonnes sont nulles.*

2. *En déduire*

$$A^2 = Tr\ (A).A \text{ et } \det(I_n + A) = 1 + Tr\ A.$$

Polynômes annulateurs et applications

Exercice 15 : Puissances d'une matrice

Pour n entier relatif donné, calculer A^n en faisant une division euclidienne par un polynôme annulateur de A.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix}$.

Exercice 16 : Taille paire

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = -I_n$.

1. *Soit X non nul. Montrer que (X, MX) est une famille libre. On pose $F_X = Vect(X, MX)$.*

2. *Montrer qu'il existe des matrices colonnes $X_1, X_2, \dots X_p$ non nuls tels que $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = F_{X_1} \oplus \cdots \oplus F_{X_p}$.*

3. *En déduire que n est pair.*

Exercice 17 : Rang pair

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^3 + M = 0$. On note u l'endomorphisme canoniquement associé à M.

1. *Montrer que $Im(u)$ est stable par u et pour $x \in Im(u)$, calculer $u^2(x)$.*

2. *Soit v l'endomorphisme de $Im(u)$ égal à la restriction de u sur $Im(u)$. Montrer que v est un isomorphisme.*

3. *En déduire que le rang de M est un entier pair.*

Exercice 18 : triangulaire par blocs

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire par blocs de la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \text{ avec } A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \text{ et } B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K}).$$

On suppose connus deux polynômes P et $Q \in \mathbb{K}[X]$ annulateurs de A et B respectivement.

Montrer que $P(M) = \begin{pmatrix} (0) & \star \\ (0) & \star \end{pmatrix}$.

Exprimer en fonction de P et Q un polynôme annulateur de M.