Matrices - Déterminants

I — Matrices - Généralités

1) Matrices

Matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ *(1)*

(1) : ***Notation :*** $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in [\![1\,,\,q]\!] \times [\![1\,,\,p]\!]}$.
(2) : *Ensemble de matrices.* ***Notation :*** $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. *Matrices carrées :* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
(3) : *Base canonique des* $(E_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant q, 1\leqslant j\leqslant p}$.
(4) : *Soit* $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. *On appelle transposée de la matrice* A *la matrice* $(a'_{i,j}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, *telle que pour tout* $(i,j) \in [\![1\,,\,p]\!] \times [\![1\,,\,q]\!]$, $a'_{i,j} = a_{j,i}$. ***Notation :*** A^T *ou* ${}^tA$.
(5) : *L'application* $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$; $A \mapsto {}^tA$ *est un isomorphisme à caractère involutif.*
(6) : *Soient* $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ *et* $B \in \mathcal{M}_{r,q}(\mathbb{K})$. *Alors* ${}^t(BA) = {}^tA\,{}^tB$.
(7) : *Si* M *est inversible,* $({}^tM)^{-1} = {}^t(M^{-1})$.

2) Matrices carrées

Algèbre des matrices carrées *(2)*

(1) : *Addition et multiplication (lois internes) et dilatation (loi externe).*
(2) : *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times, \cdot)$ *est une* $\mathbb{K}$*-algèbre de dimension* n^2, *d'unité* I_n.
Si $n \geqslant 2$, *l'anneau* $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ *est* **non** *commutatif et possède des diviseurs de zéro.*

Produit de matrices élémentaires *(3)*

Soit $(i,j,k,l) \in [\![1\,,\,n]\!]^4$. *Alors* $E_{i,j}E_{k,l} = \delta_j^k E_{i,l}$.

Sous algèbre des matrices diagonales *(4)*

(1) : *On dit que* $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *est diagonale lorsque pour tout* $(i,j) \in [\![1\,,\,n]\!]^2$, *si* $i \neq j$ *alors* $a_{i,j} = 0$.
Notation : $A = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n) \in \mathfrak{D}_n(\mathbb{K})$.
(2) : $\mathfrak{D}_n(\mathbb{K})$ *est une* $\mathbb{K}$*-algèbre commutative de dimension* n *qui admet* $(E_{i,i})_{i\in [\![1\,,\,n]\!]}$ *pour base.*
(3) : *Soit* $A = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n) \in \mathfrak{D}_n(\mathbb{K})$ *et* $m \in \mathbb{N}$. *Alors* $A^m = \mathrm{diag}(a_1^m, \ldots, a_n^m)$.
(4) : *On peut généraliser cette propriété de calcul à une matrice diagonale par blocs :*

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} A_1^m & 0 \\ 0 & A_2^m \end{pmatrix}$$

(5) : *Une matrice* $A \in \mathfrak{D}_n(\mathbb{K})$ *est scalaire s'il existe* $\lambda \in \mathbb{K}$ *tel que* $A = \lambda I_n$. ***Notation :*** $A \in \mathbb{K}I_n$.
(6) : $\mathbb{K}I_n$ *est un corps isomorphe à* $\mathbb{K}$.

Théorème : centre de l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (loi multiplicative) *(5)*

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$. *Si* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *commute avec toutes les matrices de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, *alors* A *est une matrice scalaire.*

Sous algèbre des matrices triangulaires supérieures *(6)*

(1) : *On dit que $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire supérieure (resp. inférieure) lorsque pour tout $(i,j) \in [\![1\,,\,n]\!]^2$, si $i > j$ (resp. $i < j$) alors $a_{i,j} = 0$.* ***Notation :*** *$A \in \mathfrak{T}_n^{\mathrm{sup}}(\mathbb{K})$ (resp. $A \in \mathfrak{T}_n^{\mathrm{inf}}(\mathbb{K})$).*

(2) : *$\mathfrak{T}_n^{\mathrm{sup}}(\mathbb{K})$ (resp. $\mathfrak{T}_n^{\mathrm{inf}}(\mathbb{K})$) est une $\mathbb{K}$-algèbre de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$, qui admet pour base $(E_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n}$ (resp. $(E_{i,j})_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n}$).*

(3) : *En particulier, le produit de deux matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) est une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure).*

Sous espaces vectoriels des matrices symétriques et antisymétriques *(7)*

(1) : *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est symétrique (resp. antisymétrique) lorsque ${}^tA = A$ (resp. ${}^tA = -A$).* ***Notation :*** *$A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ (resp. $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$).*

(2) : *$\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ supplémentaires de dimensions respectives $\frac{n(n+1)}{2}$ et $\frac{n(n-1)}{2}$, et de bases respectives $(E_{i,i})_{i \in [\![1\,,\,n]\!]} \cup (E_{i,j} + E_{j,i})_{1 \leqslant i < j \leqslant n}$ et $(E_{i,j} - E_{j,i})_{1 \leqslant i < j \leqslant n}$.*

Groupe multiplicatif des matrices inversibles *(8)*

(1) : *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est inversible lorsqu'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$.* ***Notation :*** *A^{-1}. L'ensemble des matrices carrées d'ordre n inversibles à coefficients dans $\mathbb{K}$ se note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.*

(2) : *$(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \times)$ est un groupe (non commutatif) appelé groupe linéaire d'ordre n.*

(3) : *Si $(A,B) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})^2$, alors $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

(4) : *Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On a : $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K}) \Leftrightarrow ad - bc \neq 0$. Dans ce cas, $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.*

(5) : *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{K})$. Alors $CB = 0 \Rightarrow C = 0$ et $BA = 0 \Rightarrow A = 0$.*

(6) : *Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Alors ${}^tA \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.*

II — Déterminants

1) Déterminant d'une matrice carrée

Formes n-linéaires alternées sur un espace de dimension n *(9)*

(1) : *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. On appelle forme n-linéaire sur E toute application de E^n dans $\mathbb{K}$ linéaire par rapport à chacune de ses variables.*

(2) : *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et f une forme n-linéaire sur E. On dit que f est :*

- *alternée si elle s'annule sur une famille de n vecteurs dès que cette famille contient deux vecteurs égaux,*
- *symétrique si pour tout $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) \in E^n$ et tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $f(\vec{x}_{\sigma(1)}, \ldots, \vec{x}_{\sigma(n)}) = f(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$,*
- *antisymétrique si pour tout $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) \in E^n$ et tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $f(\vec{x}_{\sigma(1)}, \ldots, \vec{x}_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$.*

Propriétés et structure *(10)*

(1) : *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et f une forme n-linéaire sur E. Alors f est antisymétrique si et seulement si elle est alternée.*

(2) : *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et f une forme n-linéaire alternée sur E.*

- *L'image d'une n-liste de vecteurs liés de E est nulle.*
- *On conserve l'image d'une n-liste de vecteurs de E en ajoutant à un des vecteurs une combinaison linéaire des autres.*

(3) : **Théorème fondamental de structure :** *l'ensemble des formes n-linéaires alternées sur un espace de dimension n est une droite vectorielle, c'est à dire : deux telles formes n-linéaires alternées sont PROPORTIONNELLES !*

Déterminant d'une matrice carrée et d'une famille de n vecteurs de $\mathbb{K}^n$. *(11)*

(1) : *Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$. On pose*

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \dots a_{n,\sigma(n)}.$$

Notation :
$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

(2) : *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a :* $\det(A) = \det({}^tA)$.

(3) : *Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ et λ un scalaire. Alors :*
- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$,
- $\det(I_n) = 1$,
- $\det(BA) = \det(B)\det(A)$ *(admis) et donc* $\det(BA) = \det(AB)$,
- $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$,
- *si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors* $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

(4) : *Si A est semblable à B, alors* $\det(A) = \det(B)$.

(5) : *Étant donnée une famille de n vecteurs $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ de $\mathbb{K}^n$, on peut définir le déterminant de cette famille dans la base canonique $\beta_{can} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_n)$ en formant la matrice $A = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \dots & \vec{x}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$ et en posant*

$$\det_{\beta_{can}}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n) = \det(A).$$

(6) : *L'application ainsi créée, $\det_{\beta_{can}} : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \times \dots \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ est LA forme n-linéaire alternée telle que*

$$\det_{\beta_{can}}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n) = 1.$$

Opérations élémentaires et déterminant : *(12)*

Du fait que le déterminant d'une famille de n vecteurs de $\mathbb{K}^n$ est une forme n-linéaire alternée, les propriétés suivantes sur les rangées (i.e. les lignes et les colonnes) d'un déterminant d'une matrice sont vérifiées :
- *Échanger deux rangées d'une matrice change le signe d'un déterminant.*
- *Ajouter à une rangée une combinaison linéaire d'autres rangées qui lui sont parallèles ne modifie pas un déterminant.*
- *On peut factoriser un scalaire commun à l'ensemble des termes d'une rangée.*
- *Si une matrice a deux lignes ou deux colonnes égales, son déterminant est nul.*

Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs *(13)*

(1) : *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A est triangulaire par blocs de la forme : $\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}$, alors* $\det(A) = \det(A_1)\det(A_3)$.

(2) : *Ce dernier résultat se généralise à toute matrice triangulaire par blocs.*

(3) : *Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux.*

Formule de développement selon une rangée *(14)*

(1) : *Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ les colonnes de A et $\det_{\beta_{can}}$ la forme déterminant associée à la base canonique $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ de $\mathbb{K}^n$. On appelle cofacteur d'indices (i,j) de la matrice A le scalaire* $\det(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{j-1}, \vec{e}_i, \vec{x}_{j+1}, \dots, \vec{x}_n)$. ***Notation :*** $A_{i,j}$.

(2) : *On appelle mineur de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ d'indices (i,j) le déterminant d'ordre $n-1$ obtenu en éliminant la i-ème ligne et la j-ème colonne de A.* ***Notation :*** $\Delta_{i,j}$

(3) : *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout $(i,j) \in [\![1\,,\,n]\!]^2$, $A_{i,j} = (-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$.*

(4) : *Pour trouver visuellement la valeur de $(-1)^{i+j}$, il suffit d'appliquer la règle du damier :*

$$\begin{vmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & \ddots & \vdots \\ + & \ddots & \ddots & - \\ \vdots & \cdots & - & + \end{vmatrix}$$

(5) : *Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$. On a la formule suivante :*

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}A_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j}\Delta_{i,j},$$

appelée développement de $\det A$ selon sa j-ème colonne.

(6) : *Un tel développement peut aussi se faire selon une ligne de A et ne dépend pas de la rangée choisie.*

(7) : *Si $n=2$: $\det A = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$; et si $n=3$:*

$$\det A = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{3,2}a_{2,1} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} - a_{1,3}a_{3,1}a_{2,2} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2}$$

Application à l'expression de l'inverse d'une matrice carrée inversible *(15)*

(1) : *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle comatrice de A la matrice $(A_{i,j})$ des cofacteurs de A.* ***Notation :*** $\mathrm{Com}(A)$.

(2) : *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a : ${}^t\mathrm{Com}(A).A = \det(A)I_n$.*

(3) : *Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. On a : $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,{}^t\mathrm{Com}(A)$.*

(4) : *En particulier, une matrice carrée à coefficients entiers admet une inverse à coefficients entiers si et seulement si son déterminant vaut ± 1.*

(5) : *Cette formule n'a pas d'utilité calculatoire pratique si $n \geqslant 4$.*

Théorème : caractérisation des bases : *(16)*

Soit $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension finie égale à n.

(1) : *$\mathcal{F}$ est une base $\iff \mathcal{F}$ est libre $\iff \mathcal{F}$ est génératrice $\iff Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est inversible $\iff \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$.*

(2) : *Dans ce cas, $Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \times Mat_{\mathcal{F}}(\mathcal{B}) = I_n$.*

III — Exercices déterminants

Exercice 1 : Calcul de déterminants

Calculer les déterminants suivants :

1) $\begin{vmatrix} x & a & b & x \\ b & x & x & a \\ x & b & a & x \\ a & x & x & b \end{vmatrix}$ **2)** $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$ **3)** $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$ **4)** $\begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ b+c & bc & b^2+c^2 \\ c+a & ca & c^2+a^2 \end{vmatrix}$

5) $\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & ab \\ b^2 & ab & a^2 \\ ab & a^2 & b^2 \end{vmatrix}$

Réponse : $(b-a)^2(a+b+2x)(a+b-2x)$, $(a+b+c)^3$, $2abc(a-b)(b-c)(c-a)$, $(a-b)(b-c)(c-a)(ab+ac+bc)$, $-(a^3-b^3)^2$

Exercice 2 : Calcul de déterminants

Calculer les déterminants suivants :

1) $\begin{vmatrix} a & b & & (0) \\ c & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ (0) & & c & a \end{vmatrix}$, **2)** $\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & (0) & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{vmatrix}$ **3)** $\begin{vmatrix} \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \cdots & \binom{n}{p} \\ \binom{n+1}{0} & \binom{n+1}{1} & \cdots & \binom{n+1}{p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{n+p}{0} & \binom{n+p}{1} & \cdots & \binom{n+p}{p} \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1 & \cdots & \cdots & b_1 \\ b_2 & a_2+b_2 & b_2 & \cdots & b_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ b_n & \cdots & \cdots & b_n & a_n+b_n \end{vmatrix}$ **5)** $\begin{vmatrix} a_1-b_1 & \cdots & a_1-b_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_n-b_1 & \cdots & a_n-b_n \end{vmatrix}$, $(n \geqslant 3)$ **6)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 1 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}$

7) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & & \vdots \\ 2 & 1 & 0 & \ddots & 2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ n-1 & \cdots & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ **8)** $\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \dots & (0) \\ 0 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \alpha \\ \alpha & \dots & \dots & 1 \end{vmatrix}$

Réponses : $\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$ *si* $\alpha \neq \beta$ *sont les racines de* $X^2 - aX + bc = 0$ *ou bien* $(n+1)(a/2)^n$ *si* $\alpha = \beta$, $a^{n-3}(a-b)(a^2+ab-2(n-2)b^2)$, *1*, $a_1a_2\dots a_n(1+\frac{b_1}{a_1}+\cdots+\frac{b_n}{a_n})$, *0*, $\frac{1}{2}(-1)^{n(n-1)/2}n^{n-1}(n+1)$,$(-1)^{(n-1)(n-2)/2}(n-1)2^{n-2}$, $1-(-1)^n\alpha^n$.

Exercice 3 : Calcul par dérivation

Soient $a, b, c, d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *des fonctions dérivables et* $f(x) = \begin{vmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{vmatrix}$.

Montrer que f *est dérivable et que :* $f'(x) = \begin{vmatrix} a'(x) & b(x) \\ c'(x) & d(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a(x) & b'(x) \\ c(x) & d'(x) \end{vmatrix}$.

Généraliser à un déterminant $n \times n$. *Application : Calculer* $\begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 1 & \cos(x+\alpha) & \sin(x+\alpha) \\ 1 & \cos(x+\beta) & \sin(x+\beta) \end{vmatrix}$.

Réponse : $\sin\alpha - \sin\beta - \sin(\alpha-\beta)$.

Exercice 4 : Déterminant de Vandermonde

Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$. *Le déterminant de Vandermonde associé aux* a_i *est :* $V(a_1, \dots, a_n) = \det(A)$ *où les coefficients de* A *sont tels que* $a_{i,j} = a_i^{j-1}$).
Calculer et factoriser $V(a, b)$ *et* $V(a, b, c)$.

Montrer que les polynômes $V(a_1, \dots, a_{n-1}, X)$ *et* $V(a_1, \dots, a_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1}(X - a_i)$ *sont égaux.*

En déduire que $V(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)$.

IV — Changements de bases

1) Matrice d'une application linéaire exprimée dans un couple de bases

Rappels : *(17)*

(1) : *Application linéaire canoniquement associée à une matrice :* $M = Mat_{\beta_{can},\beta_{can}}(f)$ *pour* $f(e_i) = \sum_{j=1} m_{j,i} e_j$.
(2) : $Mat(f(x_1), \ldots, f(x_p))$, $Mat(f \circ g)$, $Mat(f^{-1})$.
(3) : *Isomorphisme entre un* $\mathbb{K}$*-ev de dimension* n *et* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
(4) : *Isomorphisme entre* $\mathcal{L}(E,F)$ *et* $\mathcal{M}_{\dim F, \dim E}(\mathbb{K})$. *Cas* $F = E$.
(5) : *Lorsque* $A = Mat_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f)$ *et* $B = Mat_{\mathcal{B}'_1,\mathcal{B}'_2}(f)$ *représentent la même application linéaire dans deux couples de bases différents, on dit que* A *et* B *sont des matrices équivalentes.*
(6) : *Lorsque* $A = Mat_{\mathcal{B}_1}(f)$ *et* $B = Mat_{\mathcal{B}_2}(f)$ *représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes, on dit que* A *et* B *sont semblables.*

Propriété *(18)*

Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$. *On suppose que, pour tout* $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $AX = BX$. *Alors* $A = B$.

2) Changement de base(s)

Matrice de changement de base *(19)*

(1) : *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie* n *et* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{B}'$ *deux bases de* E. *La matrice de passage de la base* $\mathcal{B}$ *(dite ancienne base) vers la base* $\mathcal{B}'$ *(dite nouvelle base) est la matrice carrée d'ordre* n *dont la* j*-ième colonne est constituée des coordonnées du* j*-ième vecteur de* $\mathcal{B}'$ *dans la base* $\mathcal{B}$. *Cette matrice est inversible comme matrice dans la base* $\mathcal{B}$ *de l'endomorphisme de* E *qui transforme* $\mathcal{B}$ *en* $\mathcal{B}'$. ***Notation :*** $\mathfrak{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$.
(2) : *C'est la matrice de la fonction identité de* E *exprimée dans le couple de bases* ($\mathcal{B}'$ *-départ-* , $\mathcal{B}$ *-arrivée-*).

Effet du changement de base sur les matrices d'un vecteur *(20)*

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie* n, $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{B}'$ *deux bases de* E *et* x *un vecteur de* E. *On note* $X = Mat_{\mathcal{B}}(x) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *le vecteur colonne des coordonnées de* x *dans la base* $\mathcal{B}$, $X' = Mat_{\mathcal{B}'}(x) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *le vecteur colonne des coordonnées de* x *dans la base* $\mathcal{B}'$ *et* $P = \mathfrak{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *la matrice de passage de* $\mathcal{B}$ *vers* $\mathcal{B}'$.

Alors $X = PX'$.

Effet du changement de base sur les matrices d'une application linéaire *(21)*

Soient E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-ev de dimensions finies* p *et* q *et* $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
$\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{B}'$ *deux bases de* E, $\mathcal{C}$ *et* $\mathcal{C}'$ *deux bases de* F. *On note :*

- $A = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ *la matrice de* f *dans les bases* $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$,
- $B = Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f) \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ *la matrice de* f *dans les bases* $\mathcal{B}'$ *et* $\mathcal{C}'$,
- $P = \mathfrak{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ *la matrice de passage de* $\mathcal{B}$ *vers* $\mathcal{B}'$
- $Q = \mathfrak{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'} \in \mathrm{GL}_q(\mathbb{K})$ *la matrice de passage de* $\mathcal{C}$ *vers* $\mathcal{C}'$.

Alors $B = Q^{-1}AP$.

$$\begin{tikzcd}
(E,\mathcal{B}) \arrow[r, "A", "f"'] & (F,\mathcal{C}) \arrow[d, "Q^{-1}=\mathfrak{P}_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}}", "id_F"'] \\
(E,\mathcal{B}') \arrow[u, "\mathfrak{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}=P", "id_E"'] \arrow[r, "f", "B"'] & (F,\mathcal{C}')
\end{tikzcd}$$

Changement de base sur les endomorphismes *(22)*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $f \in \mathcal{L}(E)$. On note $A = \mathit{Mat}_{\mathcal{B}} f \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$, $A' = \mathit{Mat}_{\mathcal{B}'} f \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ et $P = \mathfrak{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.

$$\text{Alors } A' = P^{-1}AP.$$