Equations différentielles

I — Rappels MPSI - Équations linéaires scalaire du premier ordre sous forme résolue

1) Équation scalaire sous forme résolue

Définition : Equation différentielle linéaire scalaire *(1)*

Soit I un intervalle réel et $(a,b) \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})^2$.

(1) : *Une équation différentielle* linéaire du premier ordre sous forme résolue *est du type $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$.*

(2) : *L'équation* homogène *associée à cette équation est $y'(t) + a(t)y(t) = 0$.*

(3) : Résoudre *une telle équation* **sur** *I consiste à chercher toutes les fonctions au moins dérivables sur I qui vérifient l'équation.*

Remarque : *(2)*

On constate qu'une telle solution est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

Définition : *(3)*

Soit I un intervalle réel, $t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{K}$ et $(a,b) \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})^2$. On appelle solution sur I au problème de Cauchy en (t_0, y_0) *toute solution ϕ sur I de l'équation $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$ qui vérifie $\phi(t_0) = y_0$.*

Théorème de Cauchy-Lipschitz pour une EDL1 scalaire résolue : *(4)*

Pour tout couple $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$, il existe une unique solution au problème de Cauchy sur I à l'équation (E).

Démonstration "élémentaire" : *(5)*

L'idée est de multiplier l'ED par un terme de manière à reconnaître dans le terme de gauche une dérivée usuelle.
On note A la primitive de a qui s'annule en t_0. Alors :
$\forall t \in I, y'(t) + a(t)y(t) = b(t) \Leftrightarrow \forall t \in I, (y'(t) + a(t)y(t))\exp(A(t)) = b(t)\exp(A(t))$
$\Leftrightarrow \forall t \in I, (y\exp(A))'(t) = (b\exp(A))(t)$
$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}, \forall t \in I, y(t) = \exp(-A(t))\left(\int_{t_0}^t b(u)\exp(A(u))\,\mathrm{d}u + \lambda\right)$
D'après la condition initiale, $\lambda = y(t_0)$, d'où l'existence et l'unicité de la solution au problème de Cauchy.

Remarque : *(6)*

Les solutions non nulles de (E_h) ne s'annulent jamais.

Théorème de structure de l'espace des solutions : *(7)*

Soit I un intervalle réel et $(a,b) \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})^2$.
On note (E) l'équation $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$ et (E_h) l'équation homogène associée. Alors :

(1) : *L'équation (E_h) admet une droite vectorielle de solutions sur I, il s'agit de Vect$(t \mapsto \exp(-A(t)))$, où A désigne une primitive de a sur I.*

(2) : *L'équation (E) admet une droite affine de solutions sur I, dirigée par la droite des solutions de (E_h).*

Méthode : *(8)*

(1) : *Pour trouver une solution "particulière" de (E), on utilise la méthode de* la variation de la constante, *en cherchant une solution sous la forme $t \mapsto \lambda(t)\exp(-A(t))$.*

(2) : ***Principe de superposition des solutions :*** *si $b = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i$, avec pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $b_i \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})$ et $\alpha_i \in \mathbb{K}$, alors $\sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i$ est une solution de (E), où ϕ_i désigne une solution sur I de $y'(t) + a(t)y(t) = b_i(t)$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.*

Exercice 1 : EDL1 scalaire avec ou sans second membre

(1) : *Résoudre l'EDL1 scalaire* sous forme résolue (E_1) $y' - \frac{2}{t}y + \frac{2}{t} = 0$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$.

(2) : *Résoudre l'EDL1 scalaire* sous forme non résolue (E_2) $t(t+1)y' - (2t+1)y = -(t+1)^2$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$.

(3) : *Résoudre les EDL 1 scalaires* $y' + 2y = x^2$, $y' + y = 2\sin x$, $y' + y = x - \exp(x) + \cos x$.

(4) : *Prouver que toute solution de l'équation différentielle* $y' + e^{x^2}y = 0$ *admet une limite nulle en* $+\infty$.

(5) : *Déterminer les fonctions* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dérivables et vérifiant, pour tous* $(s,t) \in \mathbb{R}^2$, $f(s+t) = f(s)f(t)$.

2) Cas d'une équation différentielle scalaire non résolue : raccordement de solutions.

Définition : *(9)*

Soit I *un intervalle réel et* $(a,b,c) \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})^3$. *Une équation différentielle* linéaire du premier ordre **générale** *est du type* $a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$.

Méthode : *(10)*

Pour résoudre une telle équation, on se place sur des sous-intervalles $(J_1, \dots, J_p)$ *de* I *sur lesquels* a *ne s'annule pas (on suppose qu'ils existent). On procède comme présenté ci-dessus sur chaque intervalle, puis on tente de* raccorder *les solutions trouvées. Si* $k \in [\![1 , p-1]\!]$, *il faut et il suffit qu'au point* t_k *de raccordement de* J_k *et de* J_{k+1}, *si on note* ϕ_k *une solution sur* J_k *et* ϕ_{k+1} *une solution sur* J_{k+1},

- $\lim\limits_{\substack{t \to t_k \\ t < t_k}} \phi_k(t) = \lim\limits_{\substack{t \to t_k \\ t > t_k}} \phi_{k+1}(t)$, *pour obtenir un raccordement continu en* t_k, *et*
- $\lim\limits_{\substack{t \to t_k \\ t < t_k}} \phi'_k(t) = \lim\limits_{\substack{t \to t_k \\ t > t_k}} \phi'_{k+1}(t)$, *pour obtenir un raccordement dérivable (théorème de la limite de la dérivée).*

Exercice 2 : EDL1 scalaire non résolue

Résoudre l'EDL1 (E) $t(t-1)y' - (t-2)y = 0$ *sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 3 : CCP :

On considère les deux équations suivantes :

$2xy' - 3y = 0 \quad (H)$

$2xy' - 3y = \sqrt{x} \quad (E)$

1. *Résoudre l'équation* (H) *sur l'intervalle* $]0, +\infty[$.
2. *Résoudre l'équation* (E) *sur l'intervalle* $]0, +\infty[$.
3. *L'équation (E) admet-elle des solutions sur* $[0, +\infty[$ *?*

II — Rappels MPSI - Équations linéaires scalaires du second ordre à coefficients constants

Soit I un intervalle réel et $(a,b,c) \in \mathbb{K}^2 \times \mathcal{C}(I,\mathbb{K})$. Il s'agit de résoudre l'équation $y''(t) + ay'(t) + by(t) = c(t)$, notée (E). On note (E_h) l'équation *homogène* associée $y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0$.

1) Équation homogène (E_h)

Méthode : (11)

On appelle équation caractéristique *de* (E_h) *l'équation en* r : $r^2 + ar + b = 0$.
Le réel r *est solution de l'équation caractéristique si et seulement si* $t \mapsto \exp(rt)$ *est solution de* (E_h).
$\star$ *Cas complexe : Si* $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, *l'ensemble des solutions de* (E_h) *est un plan vectoriel sur* $\mathbb{C}$.
(1) : *Il s'agit de* $\mathrm{vect}_{\mathbb{C}}(t \mapsto \exp(r_1 t), t \mapsto \exp(r_2 t))$ *si* $r_1 \neq r_2$ *sont les solutions de l'équation caractéristique.*
(2) : *Il s'agit de* $\mathrm{vect}_{\mathbb{C}}(t \mapsto \exp(rt), t \mapsto t\exp(rt))$ *si* r *est racine double de l'équation caractéristique.*
$\star$ *Cas réel : Si* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, *l'ensemble des solutions de* (E_h) *est un plan vectoriel sur* $\mathbb{R}$.
(3) : *Il s'agit de* $\mathrm{vect}_{\mathbb{R}}(t \mapsto \exp(r_1 t), t \mapsto \exp(r_2 t))$ *si* $r_1 \neq r_2$ *sont les solutions* **réelles** *de l'équation caractéristique.*
(4) : *Il s'agit de* $\mathrm{vect}_{\mathbb{R}}(t \mapsto \exp(rt), t \mapsto t\exp(rt))$ *si* r *est racine double* **réelle** *de l'équation caractéristique.*
(5) : *Il s'agit de* $\mathrm{vect}_{\mathbb{R}}(t \mapsto \exp(\alpha t)\cos(\beta t), t \mapsto \exp(\alpha t)\sin(\beta t))$ *si* $\alpha \pm i\beta$ *sont solutions complexes non réelles de l'équation caractéristique.*

2) Équation avec second membre (E)

Structure de l'espace des solutions : (12)

L'ensemble des solutions de (E) *est un plan affine dirigé par le plan vectoriel des solutions de* (E_h) *et passant par toute solution de* (E). *Ainsi, les solutions de* (E) *s'obtiennent en ajoutant à une solution "particulière" de* (E) *les solutions de* (E_h).

Recherche d'une solution particulière : (13)

Pour obtenir une solution particulière de l'équation $y''(t) + ay'(t) + by(t) = c(t)$, *lorsque* $c(t) = \exp(\gamma t)P(t)$ *où* P *est un polynôme et* $\gamma \in \mathbb{K}$:
• *si* γ *n'est pas solution de l'équation caractéristique, on cherche une solution de la forme* $t \mapsto \exp(\gamma t)Q(t)$ *avec* $\deg Q = \deg P$,
• *si* γ *est racine simple de l'équation caractéristique, on cherche une solution de la forme* $t \mapsto \exp(\gamma t)tQ(t)$ *avec* $\deg Q = \deg P$,
• *si* γ *est racine double de l'équation caractéristique, on cherche une solution de la forme* $t \mapsto \exp(\gamma t)t^2Q(t)$ *avec* $\deg Q = \deg P$.

Remarque *(14)*

Cette méthode peut aussi s'appliquer aux équations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients constants avec un deuxième membre produit d'exponentielle et de polynôme.

Exercice 4 : EDL2 scalaire

Résoudre l'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = \exp(t)$.
Résoudre l'équation différentielle $y'' + 2y' + 5y = \cos^2(t)$.
Résoudre les ED :
$y'' - 4y' + 3y = (2x + 1)e^{-x}$
$y'' - 4y' + 3y = (2x + 1)e^{x}$
$y'' - 2y' + y = (x^2 + 1)e^x + e^{3x}$
$y'' - 4y' + 3y = x^2e^x + xe^{2x}\cos x$
$y'' - 2y' + 5y = -4e^{-x}\ cosx + 7e^{-x}\sin x - 4e^x\sin(2x)$
Réponses :
$x \mapsto (x/4 + 5/16)e^{-x} + \lambda e^x + e^{3x}, \lambda, \in \mathbb{R}$.
$x \mapsto (-x/22 - x)e^x + \lambda e^x + e^{3x}, \lambda, \in \mathbb{R}$.
$x \mapsto (x^4/12 + x^2/2 + Ax + B)e^x + 1/4e^{3x}.A, B \in \mathbb{R}$
$x \mapsto -(x^3/6 + x^2/4 + x/4)e^x + \dfrac{1}{2}(-x\cos x + \sin x)e^{2x} + \lambda e^x + e^{3x}.\lambda, \in \mathbb{R}$.
$x \mapsto xe^x\cos(2x) + e^{-x}\sin x + \lambda e^x cos(2x) + e^x sin(2x), \lambda, \in \mathbb{R}$.

III — Équations différentielles vectorielles

1) Équations différentielles linéaires vectorielles

a) Équations linéaires vectorielles du premier ordre sous forme résolue

Définition : EDL1 vectorielle à coefficients non constants *(15)*

Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie, I un intervalle réel et $(a,b) \in \mathcal{C}(I, \mathcal{L}(F)) \times \mathcal{C}(I, F)$.

(1) : *Une équation différentielle* ***vectorielle*** linéaire du premier ordre sous forme résolue *est du type* $\mathbf{y}'(t) = a(t)(\mathbf{y}(t)) + b(t)$.

(2) : *L'équation* homogène *associée à cette équation est* $\mathbf{y}'(t) = a(t)(\mathbf{y}(t))$.

(3) : Résoudre *une telle équation* **sur** I *consiste à chercher toutes les fonctions ϕ au moins dérivables sur I à valeurs dans F qui vérifient l'équation, i.e. pour tout $t \in I$, $\phi'(t) = a(t)(\phi(t)) + b(t)$.*

Définition : système différentiel à coefficients non constants *(16)*

Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie n, $\mathcal{B}$ une base de F, I un intervalle réel et $(a,b) \in \mathcal{C}(I, \mathcal{L}(F)) \times \mathcal{C}(I, F)$. Pour tout $t \in I$, on note $A(t) = \mathbf{M}_{\mathcal{B}}(a(t)) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B(t) = \mathbf{M}_{\mathcal{B}}(b(t)) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On appelle système différentiel *du premier ordre l'équation $X' = A(t)X + B(t)$, d'inconnue $X \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$.*

Remarque *(17)*

On peut voir que ce système différentiel du premier ordre est constitué de n équations différentielles linéaires scalaires du premier ordre, du type $x_i' = \sum_{j=1}^n a_{i,j}(t)x_j + b_i(t)$.

Définition *(18)*

Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie, I un intervalle réel, $t_0 \in I$, $\mathbf{y}_0 \in F$ et $(a,b) \in \mathcal{C}(I, \mathcal{L}(F)) \times \mathcal{C}(I, F)$. On appelle solution sur I au problème de Cauchy en $(t_0, \mathbf{y}_0)$ *toute solution ϕ sur I de l'équation $\mathbf{y}'(t) = a(t)\mathbf{y}(t) + b(t)$ qui vérifie $\phi(t_0) = \mathbf{y}_0$.*

b) Ensembles de solutions

Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire *(19)*

Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie, I un intervalle réel, $t_0 \in I$, $\mathbf{y}_0 \in F$ et $(a,b) \in \mathcal{C}(I, \mathcal{L}(F)) \times \mathcal{C}(I, F)$. Alors l'équation $\mathbf{y}'(t) = a(t)\mathbf{y}(t) + b(t)$ admet une unique solution au problème de Cauchy en $(t_0, \mathbf{y}_0)$.

Idée de démonstration : on remarque que ϕ est une solution du problème de Cauchy ssi ϕ est C^1 et pour tout $t \in I$:

$$\phi(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} (a(u)(\phi(u)) + b(u))du.$$

Cela revient à dire que ϕ est un point fixe de l'application $\psi : \phi \mapsto \left(t \mapsto y_0 + \int_{t_0}^t (a(u)(\phi(u)) + b(u))du\right)$ de $C^1(I, E)$ dans lui même.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz revient alors à montrer que ψ admet un unique point fixe.

Pour l'existence, on définit une suite récurrente (f_n) d'applications de I dans E en posant f_0 la fonction constante égale à y_0 et $f_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t (a(u)(f_n(u)) + b(u))du$.

On montre alors que cette suite de fonctions converge uniformément sur tout segment $[t_0, t]$ vers une fonction f, qui s'avère être un point fixe de ψ, et donc une solution du problème de Cauchy.

Pour l'unicité, on considère deux solutions f et g et en utilisant ψ, on montre que $f = g$ sur tout segment $[t_0, t]$.

Corollaire *(20)*

Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie n, I un intervalle réel et $(a,b) \in \mathcal{C}(I,\mathcal{L}(F)) \times \mathcal{C}(I,F)$. On note (E) l'équation $\mathbf{y}'(t) = a(t)\mathbf{y}(t) + b(t)$ et (E_h) l'équation homogène associée. Alors :

(1) : *L'ensemble des solutions sur I de l'équation (E_h) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I,F)$ isomorphe à F (par, pour tout $t_0 \in I$, $\phi \mapsto \phi(t_0)$) et est donc de dimension n. Toute base de cet espace s'appelle un* système fondamental de solutions *de (E_h) sur I.*

(2) : *L'ensemble des solutions sur I de l'équation (E) est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^1(I,F)$, dirigé par l'espace vectoriel des solutions de (E_h).*

Démonstration : Il est clair que l'ensemble des solutions de (E_h) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I,F)$. Soit $t_0 \in I$. L'application $\phi \mapsto \phi(t_0)$ est un isomorphisme de l'ensemble des solutions de (E_h) sur F par théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire. L'ensemble des solutions de (E) est non vide par le théorème de Cauchy-Lipschitz. Si on se donne deux solutions de (E), la différence est solution de (E_h).

Exercice 5 : Un premier exemple

Soit l'équation différentielle vectorielle / le système différentiel $\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + 2x_2(t) \\ x_2'(t) = 2x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$

(On remarquera que dans ce cas particulier, les coefficients sont constants...)

Soient $f = (f_1, f_2)$ solution de cette équation.

1. *En sommant les deux équations, montrer qu'il existe $a \in \mathbb{K}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}, (f_1 + f_2)(t) = a\exp(3t)$.*
2. *En déduire que $f \in Vect(\phi_1, \phi_2)$ avec : $\phi_1(t) = (\exp(-t), \exp(-t))$ et $\phi_2(t) = (\exp(3t), \exp(3t))$.*
3. *Terminer la résolution.*

c) Wronskien d'une équation vectorielle d'ordre 1

Théorème-Définition *(21)*

Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie n, $\mathcal{B}$ une base de F, I un intervalle réel et $a \in \mathcal{C}(I,\mathcal{L}(F))$. On note (E_h) l'équation **homogène** *$\mathbf{y}'(t) = a(t)\mathbf{y}(t)$ et $(\phi_1, \ldots, \phi_n)$ une famille de solutions de (E_h) sur I. On appelle* matrice wronskienne *(resp.* Wronskien*) relativement à la base $\mathcal{B}$ l'application matricielle $\mathbf{W} = \mathbf{M}_{\mathcal{B}}(\phi_1, \ldots, \phi_n) \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ (resp. $W = \det_{\mathcal{B}}(\phi_1, \ldots, \phi_n) \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{K})$). Alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

(1) : *$(\phi_1, \ldots, \phi_n)$ est un système fondamental de solutions de (E_h) sur I,*

(2) : *pour tout $t \in I$, $W(t) \neq 0$,*

(3) : *il existe $t_0 \in I$ tel que $W(t_0) \neq 0$,*

Démonstration : Soit $t \in I$, l'isomorphisme de l'espace des solutions de (E_h) vers F transforme une base en une base si et seulement si $W(t) \neq 0$, d'où (1)⇒(2). Puis clairement (2)⇒(3). Enfin, si $t_0 \in I$ vérifie $W(t_0) \neq 0$, l'isomorphisme réciproque associé à t_0 transforme donc une base (les colonnes inversibles de $\mathbf{W}(t_0)$ coordonnées de vecteurs de F dans la base $\mathcal{B}$) en une base (un système fondamental de solutions de (E_h)) et donc (3)⇒(1).

Proposition *(22)*

Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie n, $\mathcal{B}$ une base de F, I un intervalle réel et $a \in \mathcal{C}(I,\mathcal{L}(F))$. On note (E_h) l'équation **homogène** *$\mathbf{y}'(t) = a(t)\mathbf{y}(t)$ et $(\phi_1, \ldots, \phi_n)$ un système fondamental de solutions de (E_h) sur I.*

(1) : *Pour toute application f de I dans F, il existe une unique famille de fonctions $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ de I dans F telle que $f = \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi_i$.*

(2) : *De plus, si f est continue (resp. $\mathcal{C}^1$) sur I, alors $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont continues (resp. $\mathcal{C}^1$) sur I.*

Démonstration : Soit $t \in I$. Le vecteur $f(t)$ appartient à F donc il existe une unique famille $(\lambda_i(t)) \in \mathbb{K}^n$ telle que $f(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(t)\phi_i(t)$. De plus, si on note $F(t) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (resp. $U(t)$) le vecteur colonne des coordonnées de $f(t)$ dans la base $\mathcal{B}$ (resp. dans la base $(f_1(t), \ldots, f_n(t))$), alors $U(t) = (\mathbf{W}(t))^{-1}F(t)$, puisque puisque $\mathbf{W}(t)$ est la matrice du changement de bases de $\mathcal{B}$ vers $(f_1(t), \ldots, f_n(t))$. Or $(\mathbf{W})^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, puisque $(\mathbf{W})^{-1} = \frac{1}{W(t)}{}^t(\mathrm{Com}\,\mathbf{W})$ et que $\mathbf{W}$ et W sont $\mathcal{C}^1$ sur I et que W ne s'annule pas. Donc, puisque le produit matriciel est bilinéaire en dimension finie, U est bien continue (resp. $\mathcal{C}^1$).

Méthode de variation des constantes *(23)*

Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie n, $\mathcal{B}$ une base de F, I un intervalle réel et $a \in \mathcal{C}(I, \mathcal{L}(F))$.
On note (E) l'équation $\mathbf{y}'(t) = a(t)\mathbf{y}(t) + b(t)$, (E_h) l'équation homogène associée et $(\phi_1, \ldots, \phi_n)$ un système fondamental de solutions de (E_h) sur I.
On peut légitimement chercher une solution $\phi = \sum_{i=1}^{n} \lambda \phi_i$ d'après ce qui précède.
En dérivant, on obtient, pour tout $t \in I$:
$\phi'(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i'(t)\phi_i(t) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t)\phi_i'(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i'(t)\phi_i(t) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t)(a(t))(\phi_i(t)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i'(t)\phi_i(t) + (a(t))(\phi(t))$.
Or $\phi'(t) = (a(t))(\phi(t)) + b(t)$, donc $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i'\phi_i = b$.
***Bilan :** une solution particulière ϕ de (E) sur I sera sous la forme $\phi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \phi_i$ telle que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i'\phi_i = b$.*

Exercice 6 : Retour sur le premier exemple

Résoudre l'équation différentielle vectorielle avec second membre suivante :
$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + 2x_2(t) + e^{-t} \\ x_2'(t) = 2x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

Principe de superposition des solutions *(24)*

Si $b = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i b_i$, avec pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $b_i \in \mathcal{C}(I, F)$ et $\alpha_i \in \mathbb{K}$, alors $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \phi_i$ est une solution de (E), où ϕ_i désigne une solution sur I de $\mathbf{y}'(t) + a(t)\mathbf{y}(t) = b_i(t)$, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$.

Remarque *(25)*

Si l'équation (E) n'est pas sous forme résolue, on commencera par la mettre sous forme résolue, on résoudra cette nouvelle équation différentielle et on terminera par des raccordements de solutions comme dans le cas numérique, vu dans le premier paragraphe.

d) Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants
Equation linéaire vectorielle du premier ordre à coefficients constants

Théorème de Cauchy-Lipschitz d'une EDL1 vectorielle à coefficients constants *(26)*

Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie, I un intervalle réel et $(a, b) \in \mathcal{L}(F) \times \mathcal{C}(I, F)$. On note (E) l'équation $\mathbf{y}'(t) = a\mathbf{y}(t) + b(t)$ et (E_h) l'équation homogène associée. Alors :

(1) : *L'unique solution sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy de (E_h) en $(t_0, \mathbf{y}_0) \in I \times F$ est :*
$$t \mapsto \exp((t - t_0)a)(\mathbf{y}_0).$$

(2) : *L'unique solution sur I du problème de Cauchy de (E) en $(t_0, x_0) \in I \times F$ est :*
$$t \mapsto \exp((t - t_0)a)(\mathbf{y}_0) + \int_{t_0}^{t} \exp((t - u)a)(b(u))\, du.$$

Démonstration :

- On commence par vérifier que le problème de Cauchy $\mathbf{y}'(t) = a\mathbf{y}(t)$ avec $\mathbf{y}'(t_0) = \mathbf{y}_0$ admet une unique solution. On rappelle que si $f(t) = \exp(t \cdot a)$, alors f est dérivable et $f'(t) = a \circ \exp(t \cdot a)$. La démonstration faite dans le cas scalaire s'adapte alors tout à fait au cas vectoriel et les formules obtenues sont similaires.
- Sinon, en admettant le théorème de Cauchy-Lipschitz dans le cas général, il suffit de montrer que les applications proposées conviennent : on note $\phi : t \mapsto \exp((t - t_0)a)(x_0)$ et $\phi_0 : t \mapsto \int_{t_0}^{t} \exp((t - u)a)(b(u))\, du$. Soit $t \in I$.
  (i) On a : $\phi'(t) = (a \circ \exp((t - t_0)a))(x_0)$ et $\phi(t_0) = \mathrm{id}_F(x_0) = x_0$.
  (ii) On commence par remarquer que :
  $\phi_0(t) = \exp(ta)\left(\int_{t_0}^{t} \exp(-ua)(b(u))\, du\right) = B\left(\exp(ta), \int_{t_0}^{t} \exp(-ua)(b(u))\, du\right)$, où B désigne l'application bilinéaire $\mathcal{L}(F) \times F \to F$; $(f, x) \mapsto f(x)$.
  De sorte que $\phi_0'(t) = B\left(a \circ \exp(ta), \int_{t_0}^{t} \exp(-ua)(b(u))\, du\right) + B\left(\exp(ta), \exp(-ta)(b(t))\right) = a(\phi_0(t)) + b(t)$ et donc ϕ_0 est solution de (E) et vérifie aussi $\phi_0(t_0) = 0$.

Considérations matricielles

Système différentiel linéaire du premier ordre à coefficients constants

Définition *(27)*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle système différentiel linéaire à coefficients constants *toute équation du type $X' = AX$. Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, une* solution sur I *du système est une application $X \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$ telle que, pour tout $t \in I$, $X'(t) = AX(t)$.*

Définition *(28)*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, I un intervalle réel, $t_0 \in I$, $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $X' = AX$ un système différentiel linéaire à coefficients constants. On appelle solution sur I au problème de Cauchy en (t_0, X_0) *toute solution Φ sur I du système qui vérifie $\Phi(t_0) = X_0$.*

Théorème de Cauchy-Lipschitz matriciel *(29)*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, I un intervalle réel, $t_0 \in I$, $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $X' = AX$ un système différentiel linéaire à coefficients constants. Il existe une unique solution sur I au problème de Cauchy en (t_0, X_0) au système différentiel, c'est $t \mapsto \exp((t - t_0)A)X_0$.

Démonstration : Conséquence du paragraphe précédent. On peut aussi adapter la preuve du cas scalaire au cas matriciel.

Corollaire *(30)*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, I un intervalle réel et $X' = AX$ un système différentiel linéaire à coefficients constants. L'ensemble des solutions sur I au système différentiel est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

Démonstration : Déjà vu.

Pratique des systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

Méthode vue dans le chapitre réduction : *(31)*

Pour résoudre un système différentiel linéaire à coefficients constants $X' = AX$, on peut chercher à calculer $\exp(tA)$ en calculant les puissances de A à l'aide d'un polynôme annulateur de A. On peut par ailleurs chercher à réduire la matrice A. Deux cas sont alors possibles :

(1) : *Si A est diagonalisable, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et D une matrice carrée diagonale telle que $D = P^{-1}AP$. En posant $X = PY$, on obtient le système $Y' = DY$, très simple à résoudre. En effet, ce nouveau système est constitué de n équations linéaires du premier ordre à coefficient constant du type $y' = \lambda_i y$, laquelle admet $\mathrm{vect}(t \mapsto \exp(\lambda_i t))$ pour ensemble de solutions. On obtient ainsi l'espace vectoriel de dimension n des solutions de $Y' = DY$, puis on retrouve celui des solutions de $X' = AX$ à l'aide de la formule $X = PY$.*

(2) : *Si A n'est pas diagonalisable, on peut trigonaliser A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Ainsi, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et T une matrice carrée triangulaire supérieure telle que $T = P^{-1}AP$. En posant $X = PY$, on obtient le système $Y' = TY$, que l'on résout ligne après ligne en partant de la dernière et en introduisant les résultats préalablement trouvés au sein des équations qui sont alors des équations différentielles du premier ordre à coefficients constants avec second membre.*

Exercice 7 : Système différentiel à coefficients constants sans second membre

Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = -4x + 6y - 3z \\ y' = -x + 3y - z \\ z' = 4x - 4y + 3z \end{cases}$$

Exercice 8 : CCP 74

1. *On considère la matrice* $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}$.

a. *Justifier sans calcul que* A *est diagonalisable.*

b. *Déterminer les valeurs propres de* A *puis une base de vecteurs propres associés.*

2. *On considère le système différentiel* $\begin{cases}x'=x+2z\\y'=y\\z'=2x+z\end{cases}$, x,y,z *désignant trois fonctions de la variable* t, *dérivables sur* $\mathbb{R}$.

En utilisant la question 1. et en le justifiant, résoudre ce système.

Exercice 9 : CCP 75

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}-1&-4\\1&3\end{pmatrix}$.

1. *Démontrer que* A *n'est pas diagonalisable.*

2. *On note* f *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^2$ *canoniquement associé à* A.

Trouver une base (v_1,v_2) *de* $\mathbb{R}^2$ *dans laquelle la matrice de* f *est de la forme* $\begin{pmatrix}a&b\\0&c\end{pmatrix}$.

On donnera explicitement les valeurs de a, b *et* c.

3. *En déduire la résolution du système différentiel* $\begin{cases}x'=-x-4y\\y'=x+3y\end{cases}$.

Exercice 10 : Système différentiel à coefficients constants avec second membre

Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases}x'=5x+y-z+1-2t-6t^2\\y'=2x+4y-2z-2+2t-6t^2\\z'=x-y+3z-1+4t\end{cases}$$

Remarque *(32)*

On peut ramener toute équation différentielle linéaire d'ordre n *à coefficients constants du type* $x^{(n)}=a_{n-1}x^{(n-1)}+\cdots+a_1x'+a_0x$ *à la résolution du système différentiel* $X'=AX$ *en posant :*

$$X=\begin{pmatrix}x^{(n-1)}\\ \vdots\\ x\end{pmatrix}\text{ et }A=\begin{pmatrix}a_{n-1}&\cdots&a_1&a_0\\1&0&\cdots&0\\&\ddots&\ddots&\vdots\\(0)&&1&0\end{pmatrix}$$

ou bien :

$$X=\begin{pmatrix}x\\ \vdots\\ x^{(n-1)}\end{pmatrix}\text{ et }A=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\&\ddots&\ddots&&\vdots\\(0)&&&0&1\\a_{n-1}&a_{n-2}&\ldots&a_1&a_0\end{pmatrix}$$

IV — Équations linéaires scalaires d'ordre 2 à coefficients non constants

1) Structure de l'ensemble des solutions

Définition *(33)*

Soit I un intervalle réel et $(a,b,c) \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})^3$. Une équation différentielle scalaire linéaire du second ordre sous forme résolue *est du type $y''(t) = a(t)y'(t)+b(t)y(t)+c(t)$. L'équation* homogène *scalaire associée à cette équation est $y''(t) = a(t)y'(t)+b(t)y(t)$.* Résoudre *une telle équation sur I consiste à chercher toutes les fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$ au moins deux fois dérivables sur I qui vérifient l'équation.*

Remarque *(34)*

En posant $A : t \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b(t) & a(t) \end{pmatrix}$, $B : t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$, on constate que l'équation $y''(t) = a(t)y'(t) + b(t)y(t) + c(t)$ se ramène à l'équation $X' = A(t)X + B(t)$. Les résultats sur les équations vectorielles linéaires d'ordre 1 s'appliquent donc.

Définition *(35)*

Soit I un intervalle réel, $t_0 \in I$, $(y_0, y_1) \in \mathbb{K}^2$ et $(a,b,c) \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})^3$. On appelle solution sur I au problème de Cauchy en (t_0, y_0, y_1) *toute solution ϕ sur I de l'équation $y''(t) = a(t)y'(t) + b(t)y(t) + c(t)$ qui vérifie $\phi(t_0) = y_0$ et $\phi'(t_0) = y_1$.*

Théorème de Cauchy-Lipschitz *(36)*

Soit I un intervalle réel, $t_0 \in I$, $(y_0, y_1) \in \mathbb{K}^2$ et $(a,b,c) \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})^3$. Il existe une unique solution sur I au problème de Cauchy en (t_0, y_0, y_1) à l'équation $y''(t) = a(t)y'(t) + b(t)y(t) + c(t)$.

Démonstration : On note $X_0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix}$. On cherche alors une solution sur I au problème de Cauchy en (t_0, X_0), laquelle existe et est unique d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire.

Corollaire *(37)*

Soit I un intervalle réel et $(a,b,c) \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})^3$. On note (E) l'équation $y(t)'' = a(t)y'(t) + b(t)y(t) + c(t)$ et (E_h) l'équation homogène associée. Alors :

(1) : *L'ensemble des solutions sur I de (E_h) est un plan vectoriel.*

(2) : *L'ensemble des solutions sur I de (E) est un plan affine dirigé par l'ensemble des solutions sur I de (E_h).*

Démonstration : On se ramène au paragraphe précédent et on étudie l'isomorphisme entre l'espace vectoriel des solutions sur I de l'équation homogène et $\mathbb{K}^2$ donné par $\phi \mapsto (\phi(t_0), \phi'(t_0))$.

Remarque *(38)*

Lorsqu'une équation différentielle linéaire du second ordre n'est pas sous forme résolue, on s'y ramènera systématiquement en se plaçant sur un intervalle où la fonction en facteur de y'' ne s'annule pas.

2) Équation homogène et Wronskien d'une équation scalaire d'ordre 2

Définition *(39)*

Soit I un intervalle réel, $(a,b) \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})^2$, l'équation **homogène** *$y''(t) = a(t)y'(t)+b(t)y(t)$, notée (E_h) et (ϕ, ψ) un couple de solutions de (E_h) sur I. On appelle* Wronskien *de (ϕ,ψ) l'application : $W : t \mapsto \begin{vmatrix} \phi(t) & \psi(t) \\ \phi'(t) & \psi'(t) \end{vmatrix}$*

Proposition *(40)*

Avec les notations de la définition précédente, on a : $W' = aW$.

Définition *(41)*

Soit I un intervalle réel, $(a,b) \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})^2$ et l'équation **homogène** $y''(t) = a(t)y'(t) + b(t)y(t)$, *notée (E_h). On appelle* système fondamental de solutions sur I *toute base de l'espace vectoriel des solutions de (E_h).*

Théorème *(42)*

Soit I un intervalle réel, $(a,b) \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})^2$, l'équation **homogène** $y''(t) = a(t)y'(t)+b(t)y(t)$, *notée (E_h) et (ϕ,ψ) un couple de solutions de (E_h) sur I. On note W le Wronskien de (ϕ,ψ). Ces propositions sont équivalentes :*

(1) : *(ϕ,ψ) est un système fondamental de solutions sur I de (E_h),*

(2) : *il existe $t_0 \in I$ tel que $W(t_0) \neq 0$,*

(3) : *pour tout $t \in I$, $W(t) \neq 0$.*

Démonstration : On se ramène au paragraphe précédent.

3) Obtenir une solution de l'équation générale à l'aide de celles de l'équation homogène

Méthode *(43)*

Soit I un intervalle réel et $(a,b,c) \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})^3$. On note (E) l'équation $y''(t) = a(t)y'(t) + b(t)y(t) + c(t)$ et (E_h) l'équation homogène associée. Voici deux manières de trouver une solution "particulière" à l'équation (E) :

(1) : *On suppose connue ϕ une solution sur I de (E_h) qui* **ne s'annule pas** *sur I. On pose alors $y = \phi x$, et y est solution de (E) si et seulement si $\phi(t)x'' + (2\phi'(t) - a(t)\phi(t))x' = c(t)$, ce qui est une équation du premier ordre en x'. Il faudra ensuite déterminer une primitive d'une solution en x', puis y. Cette méthode, lorsque $c = 0$, donne une deuxième solution de (E_h), à partir d'une première.*

(2) : ***Adaptation de la méthode de variation des constantes :*** *on suppose connu un système fondamental de solutions (ϕ,ψ) de (E_h) sur I. On cherche une solution "particulière" sur I de (E) de la forme $\theta = \alpha\phi + \beta\psi$, où α et β sont des applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et en imposant, de plus, $\theta' = \alpha\phi' + \beta\psi'$. Après quelques manipulations, on constate que : $\alpha'\phi + \beta'\psi = 0$ et $\alpha'\phi' + \beta'\psi' = c$, ce qui permet d'obtenir (α',β') puisque le Wronskien de (ϕ,ψ) ne s'annule pas sur I. On obtient ensuite (α,β) et donc θ.*

Exercice 11 : ED scalaire d'ordre 2 à coefficients non constants avec second membre (CCP 31)

Déterminer une primitive de $x \mapsto \cos^4(x)$.
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' + y = \cos^3(x)$

Exercice 12 :

Pour les équations différentielles suivantes :
Chercher les solutions développables en séries entières
Résoudre complètement l'équation sur un intervalle bien choisi.
Résoudre l'équation sur $\mathbb{R}$.

(1) : $xy'' + 2y' - xy = 0$.

(2) : $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.