VARD

I — Variables Aléatoires Réelles Discrètes

1) Variables aléatoires discrètes

a) Définitions

Définition : variable aléatoire discrète *(1)*

(1) : *Une* variable aléatoire discrète *est une application $X : \Omega \to E$ telle que $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable et pour tout $x \in X(\Omega)$, l'ensemble $[X = x] = \{\omega \in \Omega$ tel que $X(\omega) = x\}$ est un évènement.*
(2) : *Ce ensemble préimage $[X = x]$ peut aussi être noté simplement $X = x$ si aucune ambiguïté n'est possible.*
(3) : *La loi de X est la probabilité sur $\mathcal{P}(E)$ définie par $\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \sum_{x \in X(\Omega) \cap A} \mathbb{P}(X = x)$.*
(4) : *$X, Y : \Omega \to E$ sont dites équidistribuées lorsqu'elles ont même loi (notation : $X \sim Y$).*
(5) : *Si $E = \mathbb{R}$, on dit que la variable aléatoire X est réelle (X est une v.a.r.d.). On peut aussi définir les événements $[X = x]$, $[X \geqslant x]$, $[X \leqslant x]$, $[X > x]$ et $[X < x]$.*

Exemples *(2)*

(1) : *Si $A \subset \Omega$ alors la fonction $\mathbb{1}_A$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, 1\}$.*
Sa loi est définie par $\mathbb{P}_{\mathbb{1}_A}(1) = \mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}_{\mathbb{1}_A}(0) = 1 - \mathbb{P}(A)$ (loi de Bernoulli *de paramètre $\mathbb{P}(A)$).*
(2) : *Pour l'attente du premier succès, l'application $X : F^k P \mapsto k + 1$ et $F^\infty \mapsto \infty$ est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$.*
Sa loi est la probabilité sur $\mathcal{P}(\mathbb{N}^* \cup \{\infty\})$ définie par $\mathbb{P}_X(k) = \frac{1}{2^k}$ et $\mathbb{P}_X(\infty) = 0$ (loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$).
(3) : *Pour le jeu de pile ou face infini, l'application $X_n : \omega \mapsto$ (les n premiers résultats) est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\{P, F\}^n$.*
Sa loi est la probabilité uniforme sur cet ensemble.
(4) : *Pour le jeu de pile ou face infini, l'application*
$$T : \omega \mapsto \begin{cases} n & \text{si il est sorti autant de } P \text{ que de } F \text{ pour la première fois au rang } 2n \\ \infty & \text{si les nombres de } P \text{ et } F \text{ sont constamment différents} \end{cases}$$
est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ (temps du premier retour à 0).
Sa loi est la probabilité sur $\mathcal{P}(\mathbb{N} \cup \{\infty\})$ définie par $\mathbb{P}_T(0) = 0$, $\mathbb{P}_T(n) = \dfrac{\binom{2n-2}{n-1}}{n2^{2n-1}}$ si $n \geqslant 1$, $\mathbb{P}_T(\infty) = 0$.

Composition : *(3)*

Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire discrète et $f : E \to F$. Alors $f \circ X$ est aussi une variable aléatoire discrète. Sa loi est donnée par : $\mathbb{P}(f \circ X = y) = \mathbb{P}(f(X) = y) = \sum_{f(x)=y} \mathbb{P}(X = x)$.

Exemples *(4)*

À partir d'une v.a.r.d. X, on peut envisager les variables aléatoires $|X|$, $\exp(X)$, X^2, $\sqrt[3]{X}$...

Exercice 1 : Exo CCP

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2.
On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.
On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.
On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1. *Déterminer la loi de X.*

2. *Déterminer la loi de Y.*

Exercice 2 : Exo CCP

Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.

1. *Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne.*
Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points.
On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées.
On note Y le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.

a. *Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.*

b. *Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.*

2. *Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.*

a. *Déterminer la loi de X.*

b. *Déterminer la loi de Y.*

Exercice 3 : Exo CCP

Soit $p \in]0,1[$ et $r \in \mathbb{N}^*$.
On dépose une bactérie dans une enceinte fermée à l'instant $t = 0$ (le temps est exprimé en secondes).
On envoie un rayon laser par seconde dans cette enceinte.
Le premier rayon laser est envoyé à l'instant $t = 1$.
La bactérie a la probabilité p d'être touchée par le rayon laser.
Les tirs de laser sont indépendants.
La bactérie ne meurt que lorsqu'elle a été touchée r fois par le rayon laser.
Soit X la variable aléatoire égale à la durée de vie de la bactérie.

1. *Déterminer la loi de X.*

2. *Prouver que X admet une espérance et la calculer.*

Exercice 4 : Exo CCP

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3.
On lance simultanément les n boules .
Elles viennent se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments.
Chaque compartiment peut éventuellement contenir les n boules.
On note X la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.

1. *Préciser les valeurs prises par X.*

2. a. *Déterminer la probabilité $P(X = 2)$.*

b. *Finir de déterminer la loi de probabilité de X.*

3. a. *Calculer $E(X)$.*

b. *Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} E(X)$. Interpréter ce résultat.*

b) n-uplets aléatoires

Définition : vecteurs aléatoires réels, lois marginales, loi conjointe *(5)*

(1) : *Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles discrètes définies sur un même espace probabilisé Ω (à valeurs dans $\mathbb{R}$). Alors la fonction $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ définie par $X(\omega) = (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$ est une vecteur aléatoire réel discret.*
(2) : *Sa loi de probabilité est appelée loi conjointe de $(X_1, \dots, X_n)$*
(3) : *La loi conjointe est entièrement déterminée par la donné des nombres $\mathbb{P}([X_1 = x_1] \cap \dots \cap [X_n = x_n]) = \mathbb{P}(X = (x_1, \dots, x_n))$ lorsque $(x_1, \dots, x_n)$ parcourt $\mathbb{R}^n$.*
(4) : *Les lois de X_1,...,X_n sont appelées lois marginales de $(X_1, \dots, X_n)$.*

Formules pour un couple de variables aléatoires : *(6)*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = x) &= \textstyle\sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])\ ; \\ \mathbb{P}(Y = y) &= \textstyle\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])\ ; \\ \mathbb{P}(X + Y = z) &= \textstyle\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = z - x]) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}([X = z - y] \cap [Y = y]). \end{aligned}$$

Indépendance : *(7)*

(1) : *Les variables aléatoires discrètes $X_1, \dots, X_n$ sont dites mutuellement indépendantes si la loi conjointe de $(X_1, \dots, X_n)$ est le produit des lois marginales, c'est-à-dire*

$$\forall A_1 \subset \mathbb{R}, \dots, \forall A_n \subset \mathbb{R}, \mathbb{P}(X_1 \in A_1 \cap \dots \cap X_n \in A_n) = \mathbb{P}(X_1 \in A_1) \dots \mathbb{P}(X_n \in A_n).$$

Il suffit pour cela que l'on ait

$$\forall x_1 \in \mathbb{R}, \dots, \forall x_n \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(X_1 = x_1 \cap \dots \cap X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_1 = x_1) \dots \mathbb{P}(X_n = x_n).$$

Dans ce cas, toute sous-famille de $(X_1, \dots, X_n)$ est constituée de variable aléatoires discrètes mutuellement indépendantes.
(2) : *Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille de variables aléatoires discrètes définies sur un même espace probabilisé.*
On dit qu'elles sont mutuellement indépendantes lorsque toute sous-famille finie est constituée de variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes.

Exercice 5 : Exo CCP

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont la loi est donnée par :

$$\forall (j, k) \in \mathbb{N}^2,\ P((X, Y) = (j, k)) = \frac{(j + k)\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!}.$$

1. *Déterminer les lois marginales de X et de Y.*
   Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
2. *Prouver que $E\left[2^{X+Y}\right]$ existe et la calculer.*

Exemple *(8)*

(1) : *Pour toute variable aléatoire discrète X : 1 et X sont indépendantes.*
(2) : *Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une même loi de Bernoulli. On pose $S = X + Y$ et $D = X - Y$. Alors S et D ne sont pas indépendantes car $\mathbb{P}(S = 1) \cdot \mathbb{P}(D = 0) \neq 0$ tandis que $[S = 1] \cap [D = 0] = \emptyset$.*

Propriétés *(9)*

(1) : *Pour $(A_i) \in \mathcal{T}^I$ les variables aléatoires $\mathbb{1}_{A_i}$ sont mutuellement indépendantes si et seulement si les évènements A_i sont mutuellement indépendants.*
(2) : *Lorsque $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_p$ sont mutuellement indépendantes, pour toutes fonctions f, g les variables aléatoires discrètes $f(X_1, \dots, X_n)$ et $g(Y_1, \dots, Y_p)$ sont indépendantes.*
Attention : on a vu qu'il se peut que X et Y soient indépendantes sans que $X + Y$ et $X - Y$ ne le soient !

Exemple : *(10)*

Au jeu de pile ou face infini, soient $X_n : \omega \mapsto$le n-ème résultat et T_n le temps d'attente entre le $(n-1)$-ème et le n-ème retour à l'équilibre (autant de piles que de faces).
(1) : *Alors les $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ forment une famille de variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes et les $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ forment une autre famille de variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes.*
(2) : *Par contre les variables X_1, X_2, T_1 sont deux à deux indépendantes, mais non mutuellement.*

2) Moments

Définitions : *(11)*

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle discrète.
(1) : *Si X est à valeurs positives, on appelle espérance de X :*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X=x) \in [0,+\infty].$$

(2) : *Si X est de signe quelconque, on dit que X est d'espérance finie ssi la famille $(x\mathbb{P}(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable et dans ce cas, on pose :*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X=x) \in \mathbb{R}.$$

(3) : *On dit que X est centrée lorsque $\mathbb{E}(X)=0$.*
(4) : *Pour $k\in\mathbb{N}$, on dit que X a un moment d'ordre k si $\mathbb{E}(X^k)$ existe et est finie.*
(5) : *Si X est d'espérance finie, on appelle variance de X $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))^2) \in [0,+\infty]$ et écart type de X : $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)} \in [0,+\infty]$.*
(6) : *On dit que X est réduite lorsque $\mathbb{V}(X)=1$.*

Propriétés *(12)*

(1) : *Si $X \sim Y$ alors $\mathbb{E}(X)=\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(X)=\mathbb{V}(Y)$ quand ces quantités existent (réciproque fausse).*
(2) : *Pour toute fonction f : $\mathbb{E}(f\circ X) = \sum_{x\in X(\Omega)} f(x)\mathbb{P}(X=x)$ (formule de transfert).*
(3) : *Si X, Y sont des vard positives telles que $X \leqslant Y$ alors $\mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Y)$.*
La même conclusion a lieu si X, Y sont de signes quelconques et ont des espérances finies.
(4) : *$\mathbb{E}(1) = 1$; si $A \in \mathcal{T}$ alors $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)$.*
(5) : *Si $|X| \leqslant Y$ et $\mathbb{E}(Y) < +\infty$ alors $X \in L^1(\Omega,\mathbb{R})$ et $|\mathbb{E}(X)| \leqslant \mathbb{E}(|X|) \leqslant \mathbb{E}(Y)$.*
En particulier toute vard bornée admet une espérance finie.
(6) : *$\mathbb{E}$ est une forme linéaire sur l'espace vectoriel $L^1(\Omega,\mathbb{R})$ des vard ayant une espérance finie.*
L'application $X \mapsto \mathbb{E}(|X|)$ est une semi-norme sur cet espace.
(7) : *Si $X \in L^1(\Omega,\mathbb{R})$ alors pour tous réels a, b on a $\mathbb{E}(aX+b) = a\mathbb{E}(X)+b$.*
En particulier la vard $Y = X - \mathbb{E}(X)$ est centrée.
(8) : *Si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$ alors $\mathbb{E}(X) = \sum_n \mathbb{P}(X>n)$.*
(9) : *Si X admet un moment d'ordre p alors X admet un moment d'ordre k pour tout $k \in [\![0,p]\!]$.*
(10) : *L'ensemble des vard ayant un moment d'ordre p est un espace vectoriel noté $L^p(\Omega,\mathbb{R})$.*
(11) : *Si X admet un moment d'ordre 2 alors $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$.*
(12) : *Si X admet un moment d'ordre 2 alors pour tous réels a, b on a $\mathbb{V}(aX+b) = a^2\mathbb{V}(X)$.*
En particulier si $\mathbb{V}(X) \in]0,+\infty[$, la vard $(X-\mathbb{E}(X))/\sigma(X)$ est centrée réduite.
(13) : *$\mathbb{V}(X) = 0 \Longleftrightarrow X$ est presque sûrement constante.*

Exercice 6 : Exo CCP

Soit $\lambda \in]0, +\infty[$.
Soit X *une variable aléatoire discrète à valeurs dans* $\mathbb{N}^*$.
On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X = n) = \dfrac{\lambda}{n(n+1)(n+2)}$.

1. *Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle* R *définie par* $R(x) = \dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}$.
2. *Calculer* λ.
3. *Prouver que* X *admet une espérance, puis la calculer.*
4. X *admet-elle une variance ? Justifier.*

Exemples *(13)*

Pour l'attente du premier succès, soit $X : F^k P \mapsto k$ *et* $F^\infty \mapsto \infty$. *Alors* $\mathbb{E}(X) = 1$.
Pour le jeu de pile ou face infini, soit $T =$ *temps du premier retour à* 0. *Alors* $\mathbb{E}(T) = +\infty$.

Inégalités : *(14)*

Soient X, Y *deux vard et* $a \in]0, +\infty[$. *Les inégalités suivantes s'entendent dans* $[0, +\infty]$.
Markov *:* $\mathbb{P}(|X| \geqslant a) \leqslant \mathbb{E}(|X|)/a$.
Bienaymé-Tchebychev *: si* $\mathbb{E}(X^2)$ *existe,* $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant a) \leqslant \mathbb{V}(X)/a^2$.
Cauchy-Schwarz *:* $\mathbb{E}(|XY|)^2 \leqslant \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)$ *avec* $0 \times \infty = 0$.
En particulier, si X *et* Y *ont des moments d'ordre* 2 *alors* XY *est d'espérance finie.*

Théorème *(15)*

soient X, Y *deux vard* ***indépendantes*** *ayant des espérances finies. Alors* XY *a une espérance finie et* $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Contre-exemple avec X, Y non indépendantes *(16)*

$X = Y =$ *attente du premier succès,* $\mathbb{E}(XY) = 3 \neq \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 1$.

Covariance *(17)*

Soient X, Y *deux vard ayant des moments d'ordre* 2.
(1) : *On pose* $Cov(X, Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y)))$.
(2) : *On dit que* X *et* Y *sont non corrélées lorsque* $Cov(X, Y) = 0$.

Propriétés *(18)*

(1) : $Cov(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.
(2) : $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2Cov(X, Y)$; $\mathbb{V}(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_i \mathbb{V}(X_i) + 2\sum_{i<j} Cov(X_i, X_j)$.
(3) : $Cov(X, Y)^2 \leqslant \mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)$.
(4) : $Cov(X, Y)^2 = \mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y) \Longleftrightarrow \exists\,(a, b), \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ *tq* $aX + bY$ *est presque sûrement constante.*
(5) : *Lorsque* X *et* Y *sont indépendantes,* $Cov(X, Y) = 0$ *(réciproque fausse).*
(6) : *Lorsque* $X_1, \ldots, X_n$ *sont deux à deux indépendantes,* $\mathbb{V}(X_1 + \cdots + X_n) = \mathbb{V}(X_1) + \cdots + \mathbb{V}(X_n)$.

3) Fonction génératrice

Définition : *(19)*

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.
La fonction génératrice de X est $G_X = \mathbb{R} \ni t \mapsto \mathbb{E}(t^X) = \sum_n \mathbb{P}(X = n)t^n$.

Propriétés *(20)*

(1) : *Le rayon de convergence est au moins égal à 1 et $G_X(1) = 1$.*
(2) : *G_X est définie au moins sur $[-1, 1]$; elle est continue sur $[-1, 1]$.*
(3) : *G_X est dérivable en 1 si et seulement si X a une espérance finie. Dans ce cas, $\mathbb{E}(X) = G'_X(1)$.*
(4) : *G_X est k-fois dérivable en 1 si et seulement si X a un moment d'ordre k.*
Pour $k = 2$, $\mathbb{V}(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'^2_X(1)$.
(5) : *$\mathbb{P}(X = n) = G_X^{(n)}(0)/n!$. Deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ sont équidistribuées si et seulement si elles ont même fonction génératrice.*
(6) : *Si X, Y sont indépendantes alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$ (réciproque fausse).*
Si $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes alors $G_{X_1+\cdots+X_n} = G_{X_1} \ldots G_{X_n}$.

Exemples *(21)*

Si $X = \mathbb{1}_A$ alors $G_X(t) = 1 - \mathbb{P}(A) + t\mathbb{P}(A)$.
Pour l'attente du premier succès, soit X : $F^k P \mapsto k$ et $F^\infty \mapsto \infty$. Alors $G_X(t) = \frac{1}{2-t}$.
Pour le jeu de pile ou face infini, soit $T =$ temps du premier retour à 0. Alors $G_T(t) = 1 - \sqrt{1-t}$.

4) Lois usuelles

a) Loi de Bernoulli

$\mathcal{B}(p) \sim X : \Omega \to \{0, 1\}$ avec $\mathbb{P}(X = 1) = p$, $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p = q$.
$\mathbb{E}(X) = p$, $\mathbb{V}(X) = pq$, $G_X(t) = q + pt$.

b) Loi binomiale

$\mathcal{B}(n, p) \sim X_1 + \cdots + X_n$ avec $X_1, \ldots, X_n$ mutuellement indépendantes de même loi $\mathcal{B}(p)$.
$\mathbb{E}(X) = np$, $\mathbb{V}(X) = npq$, $G_X(t) = (q + pt)^n$.

Théorème *(22)*

Addition : soient X, Y indépendantes de lois $\mathcal{B}(m, p)$ et $\mathcal{B}(n, p)$. Alors $X + Y \sim \mathcal{B}(m + n, p)$.

c) Loi géométrique

$\mathcal{G}(p) \sim T = \inf\{k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } X_k = 1\}$ ($= \infty$ si $\forall\, k$, $X_k(\omega) = 0$) où $(X_1, X_2, \ldots)$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi $\mathcal{B}(p)$, $p \in]0, 1[$.
$\mathbb{P}(T = k) = q^{k-1}p$ si $k \geqslant 1$, $\mathbb{P}(t = 0) = \mathbb{P}(T = \infty) = 0$, $\mathbb{P}(T > k) = q^k$.
$\mathbb{E}(X) = 1/p$, $\mathbb{V}(X) = q/p^2$, $G_X(t) = pt/(1 - qt)$.

Théorème : Absence de mémoire : *(23)*

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Les énoncés suivants sont équivalents :
(1) : *$\forall\, n, k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X > n) > 0$ et $\mathbb{P}(X > n + k \mid X > n) = \mathbb{P}(X > k)$.*
(2) : *$\exists\, p \in]0, 1[$ tel que $X \sim \mathcal{G}(p)$.*

Minimum de deux lois géométriques : *(24)*

Soient X, Y indépendantes de lois $\mathcal{G}(p)$ et $\mathcal{G}(p')$. Alors $\min(X, Y) \sim \mathcal{G}(p + p' - pp')$.

Exercice 7 : Exo CCP

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
Soit $p \in]0,1[$. *On pose* $q = 1 - p$.
On considère N *variables aléatoires* $X_1, X_2, \cdots, X_N$ *définies sur un même espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$*, mutuellement indépendantes et de même loi géométrique de paramètre* p.

1. *Soit* $i \in [\![1, N]\!]$. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$.
Déterminer $P(X_i \leqslant n)$*, puis* $P(X_i > n)$.

2. *On considère la variable aléatoire* Y *définie par* $Y = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant N}(X_i)$.
c'est à dire $\forall \omega \in \Omega$, $Y(\omega) = \min(X_1(\omega), \cdots, X_n(\omega))$, min *désignant le plus petit élément de .*

a. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *Calculer* $P(Y > n)$.
En déduire $P(Y \leqslant n)$*, puis* $P(Y = n)$.

b. *Reconnaître la loi de* Y. *En déduire* $E(Y)$.

Exercice 8 : Exo CCP

X *et* Y *sont deux variables aléatoires indépendantes et à valeurs dans* $\mathbb{N}$.
Elles suivent la même loi définie par : $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = P(Y = k) = pq^k$ *où* $p \in]0,1[$ *et* $q = 1 - p$.
On considère alors les variables U *et* V *définies par* $U = \sup(X, Y)$ *et* $V = \inf(X, Y)$.

1. *Déterminer la loi du couple* (U, V).

2. *Déterminer la loi marginale de* U.
On admet que $V(\Omega) = \mathbb{N}$ *et que,* $\forall n \in \mathbb{N}, P(V = n) = pq^{2n}(1 + q)$.

3. *Prouver que* $W = V + 1$ *suit une loi géométrique.*
En déduire l'espérance de V.

4. U *et* V *sont-elles indépendantes ?*

Exercice 9 : Exo CCP

Soient X *et* Y *deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *et à valeurs dans* $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi du couple (X, Y) *est donnée par :*
$\forall\, (i, j) \in \mathbb{N}^2$, $P((X = i) \cap (Y = j)) = \dfrac{1}{\mathrm{e}\, 2^{i+1} j!}$

1. *Déterminer les lois de* X *et de* Y.

2. a. *Prouver que* $1 + X$ *suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de* X.

b. *Déterminer l'espérance et la variance de* Y.

3. *Les variables* X *et* Y *sont-elles indépendantes ?*

4. *Calculer* $P(X = Y)$.

Exercice 10 : Exo CCP

On admet, dans cet exercice, que : $\forall\, q \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k \geqslant q} \dbinom{k}{q} x^{k-q}$ *converge et* $\forall\, x \in]-1, 1[$, $\sum\limits_{k=q}^{+\infty} \dbinom{k}{q} x^{k-q} = \dfrac{1}{(1-x)^{q+1}}$.
Soit $p \in]0,1[$.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé.*
Soit X *et* Y *deux variables aléatoires définies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *et à valeurs dans* $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi de probabilité du couple (X, Y) *est donnée par :*

$$\forall (k, n) \in \mathbb{N}^2,\ P((X = k) \cap (Y = n)) = \begin{cases} \dbinom{n}{k} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n \ \text{si}\, k \leqslant n \\ 0 \ \text{sinon} \end{cases}$$

1. *Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.*

2. a. *Déterminer la loi de* Y.

b. *Prouver que* $1 + Y$ *suit une loi géométrique.*

c. *Déterminer l'espérance de* Y.

3. *Déterminer la loi de* X.

d) Loi de Poisson

Loi des évènements rares : *(25)*

Soit (X_n) *une suite de variables aléatoires telle que* $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$ *et* $\mathbb{E}(X_n) = np_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda \in [0, +\infty[$. *Alors pour tout* $k \in \mathbb{N}$ *fixé,* $\mathbb{P}(X_n = k) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-\lambda}\lambda^k/k!$.

Loi de Poisson *(26)*

La loi de Poisson *de paramètre* λ *est la loi de probabilité sur* $\mathbb{N}$ *définie par la formule précédente.*
Elle est notée $\mathcal{P}(\lambda)$. *Alors* $\mathbb{E}(X) = \lambda$, $\mathbb{V}(X) = \lambda$, $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$.

Addition de deux lois de Poisson : *(27)*

Soient X, Y *indépendantes de lois* $\mathcal{P}(\lambda)$ *et* $\mathcal{P}(\mu)$. *Alors* $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

Exercice 11 : Exo CCP

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé.*

1. *Soit* X *une variable aléatoire définie sur* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *et à valeurs dans* $\mathbb{N}$.
On considère la série entière $\sum t^n P(X = n)$ *de variable réelle* t.
On note R_X *son rayon de convergence.*

- **a.** *Prouver que* $R \geqslant 1$.
On pose alors $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n P(X = n)$ *et note* D_{G_X} *l'ensemble de définition de* G_X.
Justifier que $[-1, 1] \subset D_{G_X}$. *Pour tout réel t fixé, exprimer* G_X *sous forme d'une espérance.*
- **b.** *Soit* $k \in \mathbb{N}$. *Exprimer, en justifiant votre réponse,* $P(X = k)$ *en fonction de* $G_X^{(k)}(0)$.

2.
- **a.** *On suppose que* X *suit une loi de Poisson de paramètre* λ.
Déterminer D_{G_X} *et, pour tout* $t \in D_{G_X}$, *calculer* $G_X(t)$.
- **b.** *Soit* X *et* Y *deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs* λ_1 *et* λ_2.
Déterminer, en utilisant les questions précédentes, la loi de $X + Y$.

Exercice 12 : Exo CCP

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé.*

1.
- **a.** *Soit* X_1 *et* X_2 *deux variables aléatoires définies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On suppose que X_1 *et* X_2 *sont indépendantes et suivent une loi de Poisson, de paramètres respectifs* λ_1 *et* λ_2.
Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.
- **b.** *En déduire l'espérance et la variance de* $X_1 + X_2$.

2. *Soit* X *et* Y *deux variables aléatoires définies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On suppose que Y *suit une loi de Poisson de paramètre* λ.
On suppose que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ *et que, pour tout* $m \in \mathbb{N}$, *la loi conditionnelle de* X *sachant* $(Y = m)$ *est une loi binomiale de paramètre* (m, p).
Déterminer la loi de X.

5) Loi des grands nombres

Théorème *(28)*

Soit (X_n) *une suite de vard deux à deux indépendantes de même loi, ayant une espérance* m *et une variance* v *finies. Alors, pour tout* $a > 0$, $\mathbb{P}(|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - m| \geqslant a) \leqslant \frac{v}{na^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Remarque : *(29)*

Il suffit en fait que $X_1, \ldots, X_n$ *aient la même espérance, la même variance et soient deux à deux non corrélées.*