Probabilités

I — Sommabilité

1) Ensembles dénombrables

Définition : *(1)*

Un ensemble I est dit dénombrable lorsqu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to I$ bijective. Un tel φ est appelé énumération de I.
Un ensemble I est au plus dénombrable $\Leftrightarrow$ I est fini ou dénombrable $\Leftrightarrow$ I est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.

Exemples et contre exemples : *(2)*

(1) : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^2$, *sont des ensembles infinis dénombrables.*
(2) : *Un produit cartésien fini d'ensembles (au plus) dénombrables est dénombrable.*
(3) : *Une réunion fini ou dénombrable d'ensembles (au plus) dénombrables est dénombrable.*
(4) : $\mathbb{R}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ *et* $A^{\mathbb{N}}$ *avec* $\mathrm{Card}(A) \geqslant 2$ *ne sont pas dénombrables.*

Caractérisation des ensembles finis ou dénombrables : *(3)*

L'ensemble I est au plus dénombrable ssi il existe une suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties finies de I telle que $I = \bigcup_n I_n$.

On peut imposer à la suite (I_n) d'être croissante.

Conséquences *(4)*

(1) : *Toute partie de $\mathbb{N}$ est finie ou dénombrable ; toute partie d'un ensemble fini ou dénombrable est finie ou dénombrable.*
(2) : *Un ensemble non vide est fini ou dénombrable si et seulement s'il existe une injection de I dans $\mathbb{N}$.*
(3) : *Si $I_1, \dots, I_n$ sont finis ou dénombrables alors $I_1 \times \cdots \times I_n$ l'est.*
(4) : $\mathbb{Q}$ *est dénombrable : $I_n = \{p/q$ tel que $|p| \leqslant n$ et $1 \leqslant q \leqslant n\}$.*
(5) : $\mathbb{Q}[X]$ *et l'ensemble des nombres algébriques sont dénombrables. Il existe donc une infinité non dénombrable de réels transcendants.*

2) Famille sommable de réels positifs

Définition : *(5)*

Soit (a_i) une famille de réels **positifs**. *On pose :*

$$\sum_{i\in I} a_i = \sup\{a_{i_1} + \cdots + a_{i_n} \text{ tel que } i_1, \dots, i_n \in I \text{ sont distincts. }\}.$$

Cette borne supérieure des sommes sur des parties finies de I existe toujours dans $[0, +\infty]$ en convenant que la somme d'une famille vide est égale à 0.
On dit que la famille (a_i) est *sommable* **lorsque**

$$\sum_{i\in I} a_i < +\infty.$$

Exercice 1 : Exemple et contre-exemple :

(1) : *Soit* $a \in [0,1[$. *Montrer que la famille* $(a^{pq})_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ *est sommable.*

(2) : *Montrer que la famille* $\left(\dfrac{1}{p^2+q^2}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ *n'est pas sommable.*

Exemples *(6)*

(1) : *Toute famille à support fini est sommable.*

(2) : *Si* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de réels positifs alors* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$. *En particulier la suite est sommable si et seulement si la série* $\sum a_n$ *est convergente.*

(3) : *Soit* I *un ensemble dénombrable et* $\varphi : \mathbb{N} \to I$ *une énumération de* I. *Pour toute famille* $(a_i)_{i\in I}$ *de réels positifs, on a* $\sum_{i\in I} a_i = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)}$. *En particulier la quantité* $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ *ne dépend pas de l'énumération de* I *choisie.*

Théorème de comparaison des familles sommables à termes positifs : *(7)*

Soient $(a_i)_{i\in I}$ *et* $(b_i)_{i\in I}$ *deux familles de réels positifs telles que* $\forall\, i \in I,\ a_i \leqslant b_i$. *Alors* $\sum_{i\in I} a_i \leqslant \sum_{i\in I} b_i$. *En particulier, si la famille* (b_i) *est sommable alors la famille* (a_i) *l'est aussi.*

Théorème de sommation par paquets, cas réel positif : (admis) *(8)*

(1) : *Soient* $I = \cup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ *une partition de* I *et* $(a_i)_{i\in I}$ *une famille de réels positifs. On a :*

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\sum_{i\in I_n} a_i).$$

(2) : *En particulier, la famille* $(a_i)_{i\in I}$ *est sommable si et seulement si :*
- *chaque sous-famille* $(a_i)_{i\in I_n}$ *est sommable, et*
- *la famille des sommes* $(\sum_{i\in I_n} a_i)_{n\in\mathbb{N}}$ *est elle aussi sommable.*

3) Famille sommable de réels, de complexes (voire de vecteurs en dimension finie).

Définition : *(9)*

Soit $(a_i)_{i\in I}$ *une famille d'éléments de* $\mathbb{C}$.

(1) : *On dit que la famille* (a_i) *est sommable ssi la famille* $(|a_i|) \in \mathbb{R}_+^I$ *est sommable*

(2) : *Alors il existe un unique complexe* S *tel que pour tout réel* $\varepsilon > 0$, *il existe des indices* $j_1, \ldots, j_k \in I$ *distincts tels que pour toute partie* $J \subset I$ *finie contenant* $j_1, \ldots, j_k$, *on a* $|\sum_{j\in J} a_j - S| \leqslant \varepsilon$.

On note

$$\sum_{i\in I} a_i = S.$$

Exercice 2 : Contre exemple

Montrer que la famille $\left(\dfrac{(-1)^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *n'est pas sommable.*

Remarque : *(10)*

En pratique, on vérifie donc l'hypothèse de sommabilité sur la famille $(|a_i|)_{i\in I}$.

Propriétés *(11)*

(1) : *Si* $(a_i) \in E^I$ *et* $(b_i) \in E^I$ *sont deux familles sommables et* $\lambda \in \mathbb{K}$. *Alors la famille* $(c_i = a_i + \lambda b_i) \in E^I$ *est sommable et*

$$\sum_{i\in I} c_i = \lambda \sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in I} b_i$$

(2) : *Toute famille à support fini est sommable.*

(3) : *Le support d'une famille sommable est fini ou dénombrable.*

Permutation des termes : *(12)*

Soit I un ensemble infini dénombrable, φ une énumération de I et $(a_i) \in E^I$.

(1) : *La famille (a_i) est sommable si et seulement si la série $\sum a_{\varphi(n)}$ est absolument convergente.*

(2) : *Dans ce cas, $\sum_{i\in I} a_i = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)}$.*

(3) : *En particulier le nombre complexe $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ ne dépend pas de l'énumération de I choisie.*

Théorème : Sommation par paquets : *(13)*

Soient $I = \cup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ une partition de I et $(a_i)_{i\in I}$ une famille sommable de vecteurs. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ la sous-famille $(a_i)_{i\in I_n}$ est sommable et la famille des sommes est elle aussi sommable.
De plus,

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\sum_{i\in I_n} a_i).$$

Cas particuliers : *(14)*

Si $(a_i)_{i\in I}$ est sommable alors pour toute fonction $f : I \to X$ on a

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{x\in X} (\sum_{f(i)=x} a_i).$$

Une suite double $(a_{pq})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable si et seulement si la série double $\sum_p \sum_q \|a_{pq}\|$ est convergente.
Dans ce cas,

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} a_{pq} = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} a_{pq} = \sum_{q=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} a_{pq} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p+q=n} a_{pq}.$$

II — Probabilités

1) Langage des probabilités

Définitions *(15)*

(1) : *Une* épreuve aléatoire *est une expérience pouvant avoir plusieurs issues et pour laquelle on ne peut pas dire à l'avance quelle issue sera effectivement réalisée. L'ensemble Ω des issues est appelé* univers.

(2) : *Une* tribu *est un ensemble $\mathcal{T}$ de parties de Ω telle que :*

- *$\mathcal{T}$ contient Ω,*
- *$\mathcal{T}$ est stable par complémentaire,*
- *$\mathcal{T}$ est stable par union dénombrable.*

Remarque importante : *nécessairement, $\mathcal{T}$ est stable par intersection dénombrable.*

(3) : *Les éléments de $\mathcal{T}$ sont appelés* évènements.

Exercice 3 : Tribus particulières

(1) : *Montrer que $\{\emptyset, \Omega\}$ est une tribu (dite tribu discrète).*

(2) : *Soit $A \in \Omega$. Montrer que $\{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\}$ est une tribu (dite tribu de Bernoulli associée à A).*

(3) : *Montrer que $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu.*

Exercice 4 : Tribu engendrée

1. *Soit* $(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ *une famille de tribu sur un même ensemble* Ω.
Montrer que
$$\mathcal{T} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i$$
est une tribu sur Ω.
2. *Soit* $\mathcal{E}$ *une partie de* $\mathcal{P}(\Omega)$ *et* $(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ *la famille de toutes les tribus de* Ω *contenant les éléments de* $\mathcal{E}$.
Vérifier que
$$\mathcal{T} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i$$
est une tribu contenant les éléments de $\mathcal{E}$ *et que c'est la plus petite tribu (au sens de l'inclusion) vérifiant cette propriété.*

Propriétés/Définitions : *(16)*

(1) : *Si* $\mathcal{E}$ *est un ensemble de parties de* Ω, *l'intersection de toutes les tribus contenant* $\mathcal{E}$ *est la plus petite tribu contenant* $\mathcal{E}$. *On l'appelle* tribu engendrée par $\mathcal{E}$.
(2) : *l'ensemble* $\emptyset$ *appartient à toute tribu et est appelé "événement impossible".*
(3) : *l'ensemble* Ω *appartient à toute tribu et est appelé "événement certain".*
(4) : *Pour* $(A_n)_{\mathbb{N}}$ *une famille au plus dénombrable d'événements, l'ensemble* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ *est un événement qui est la conjonction de tous les* A_n. *C'est à dire qu'une issue* ω *appartient à* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ *si et seulement si* $\forall n \in \mathbb{N}, \omega \in A_n$.
(5) : *Pour* $(A_n)_{\mathbb{N}}$ *une famille au plus dénombrable d'événements, l'ensemble* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ *est un événement qui est la disjonction de tous les* A_n. *C'est à dire qu'une issue* ω *appartient à* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ *si et seulement si* $\exists n \in \mathbb{N}, \omega \in A_n$.

Exercice 5 : Limite supérieure/inférieure d'événements

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'évènements de l'espace probabilisable* $(\Omega, \mathcal{T})$.

1. *Vérifier que*
$$A = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geqslant p} A_n$$
est un évènement.
Expliquer pourquoi $\omega \in A \Leftrightarrow \omega$ *appartient à* A_n *pour une infinité d'indices* n.
2. *Même question avec*
$$A' = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geqslant p} A_n$$

Fonction probabilité : *(17)*

(1) : *Deux évènements* A, B *sont dits* incompatibles *lorsque* $A \cap B = \emptyset$. *On écrit alors* $A \sqcup B$ *pour* $A \cup B$.
(2) : *Une* probabilité *est une application* $\mathbb{P} : \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ *(en réalité* $[0, 1]$*) telle que :*

— $\forall A \in \mathcal{T}, \mathbb{P}(A) \geqslant 0$,
— $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
— *Pour toute* famille au plus dénombrable (A_n) *d'évènements deux à deux incompatibles,*
$$\mathbb{P}(\bigsqcup_n A_n) = \sum_n \mathbb{P}(A_n).$$

(3) : *Si de plus* $\Omega = \bigsqcup_n A_n$, *on dit que la famille* (A_n) *est un système complet d'événements. Alors*
$$\mathbb{P}(\bigsqcup_n A_n) = \sum_n \mathbb{P}(A_n) = 1.$$

Définitions *(18)*

(1) : *Un* espace probabilisé *est un triplet* $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ *vérifiant les axiomes précédents.*
(2) : *Soit* $A \in \mathcal{T}$, *si* $\mathbb{P}(A) = 0$, *on dit que* A *est un évènement* négligeable.
(3) : *Soit* $A \in \mathcal{T}$, *si* $\mathbb{P}(A) = 1$, *on dit que* A *est un évènement* presque sûr.

Exemples : *(19)*

(1) : *Jeu de pile ou face fini :* $\Omega = \{P, F\}^n$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2^n}\operatorname{Card}(A)$.
(2) : *Attente du premier succès :* $\Omega = \{P, FP, FFP, \ldots\} \cup \{FFF\ldots\}$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}(F^kP) = \frac{1}{2^{k+1}}$, $\mathbb{P}(F^\infty) = 0$, $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\omega)$.
(3) : *Jeu de pile ou face infini :* $\Omega = \{P, F\}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{T} =$ *la tribu engendrée par les ensembles de la forme* $A_n \times \Omega$ *avec* $A_n \subset \{P, F\}^n$, $\mathbb{P} =$ *l'unique probabilité sur* $\mathcal{T}$ *pour laquelle* $\mathbb{P}(A_n \times \Omega) = \frac{1}{2^n}\operatorname{Card}(A_n)$. *L'existence et l'unicité de* $\mathbb{P}$ *sont admises.*

Théorème : Probabilité sur un univers fini ou dénombrable : *(20)*

Soit Ω *fini ou dénombrable.*
(1) : *Soit* $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ *une famille de réels positifs telle que* $\sum_{w \in \Omega} p_\omega = 1$.
Alors la fonction $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ *définie par* $P(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega$ *est une probabilité sur* $\mathcal{P}(\Omega)$.
(2) : *Toutes les probabilités sur* $\mathcal{P}(\Omega)$ *sont de cette forme.*

Exercice 6 :

(1) : *Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur le réel* λ *pour que l'on définisse une probabilité sur* $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ *en posant* $\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{P}(\{n\}) = \dfrac{\lambda}{2^n}$.
(2) : *On choisit alors un entier au hasard. Quelle est la probabilité qu'il soit pair ? Qu'il soit supérieur à une entier* N *donné ?*

Propriétés des probabilités *(21)*

(1) : $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
(2) : $\mathbb{P}(\Omega \setminus A) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
(3) : *Si* $A \subset B$ *alors* $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$ *et* $\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B \setminus A)$.
(4) : $\mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.
(5) : *Si* (A_n) *est un S.C.E,* $\mathbb{P}(B) = \sum \mathbb{P}(B \cap A_n)$

Si (A_n) *est une suite d'évènements ...*
(6) : *croissante alors* $\mathbb{P}(\bigcup_n A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$.
(7) : *quelconque alors* $\mathbb{P}(\bigcup_n A_n) \leqslant \sum_n \mathbb{P}(A_n)$.
(8) : *négligeables alors* $\mathbb{P}(\bigcup_n A_n) = 0$.
(9) : *décroissante alors* $\mathbb{P}(\bigcap_n A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$.
(10) : *presque sûrs alors* $\mathbb{P}(\bigcap_n A_n) = 1$.

Exemples : *(22)*

Au jeu de pile ou face infini,
(1) : $\mathbb{P}($*il sort une infinité de* $P) = 1$.
(2) : $\mathbb{P}($*il sort des séquences arbitrairement longues de* P *consécutifs*$) = 1$.
(3) : $\mathbb{P}(\forall\, n,\ P$ *est majoritaire pour les* n *premiers lancers*$) = 0$

Exercice 7 :

Soit $\mathbb{P}$ *une probabilité sur* $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

1. *Montrer que* $\mathbb{P}(\{n\}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

2. *Soit* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'évènements deux à deux incompatibles d'un espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$.
Montrer $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(A_n) = 0$

3. *Soit* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'évènements de l'espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$.
On note

$$A_* = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geqslant p} A_n \text{ et } A^* = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geqslant p} A_n$$

a. *Vérifier que* $A_* \subset A^*$

b. *Montrer les inégalités de Fatou* $\mathrm{P}(A_*) \leqslant \lim_{p\to+\infty} \inf_{n\geqslant p} \mathrm{P}(A_n)$ *et* $\lim_{p\to+\infty} \sup_{n\geqslant p} \mathrm{P}(A_n) \leqslant \mathrm{P}(A^*)$

c. *Déterminer un exemple où les inégalités précédentes s'avèrent strictes.*

2) Indépendance

Définition *(23)*

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'évènements. On dit qu'ils sont mutuellement indépendants *lorsque pour tous indices $i_1,\dots,i_k\in I$ distincts, on a $\mathbb{P}(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k})=\mathbb{P}(A_{i_1})\dots\mathbb{P}(A_{i_k})$.*

Exemples : *(24)*

Au jeu de pile ou face infini, soient les évènements $A_n=\{$le n-ème lancer donne $P\}$ et $B_{n,k}=\{$le n-ème et le k-ème lancers donnent le même résultat$\}$.
Alors les évènements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendants et pour $k\neq n$, $A_n, A_k, B_{n,k}$ sont deux à deux indépendants, mais non mutuellement indépendants.
Pour l'attente du premier succès, les évènements A_n et A_k ne sont pas indépendants.

Propriétés : *(25)*

Si les évènements $(A_i)_{i\in I}$ sont mutuellement indépendants alors ...
(1) : *toute sous-famille est constituée d'évènements mutuellement indépendants.*
(2) : *toute famille obtenue en remplaçant certains A_i par leurs complémentaires est constituée d'évènements mutuellement indépendants.*
(3) : *lorsque I est fini ou dénombrable, $\mathbb{P}(\bigcap_i A_i)=\prod_i \mathbb{P}(A_i)$ (borne inférieure des produits finis).*
(4) : *toute famille obtenue en intersectant (resp. réunissant) les A_i par paquets finis ou dénombrables est constituée d'évènements mutuellement indépendants.*

3) Probabilité conditionnelle

Théorème *(26)*

Soient $(\Omega,\mathcal{T},\mathbb{P})$ un espace probabilisé et $A\in\mathcal{T}$ tel que $\mathbb{P}(A)>0$. Alors la fonction

$$\mathbb{P}_A : B\mapsto \mathbb{P}(A\cap B)/\mathbb{P}(A)$$

est une probabilité sur $\mathcal{T}$.
Le nombre $\mathbb{P}_A(B)$ est la probabilité de B sachant A. Il est parfois noté $\mathbb{P}(B|A)$.

Propriétés *(27)*

(1) : **Probabilité conditionnelle et indépendance :** *si $\mathbb{P}(A)>0$: $\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A)$ et (A et B sont indépendants) $\Longleftrightarrow \mathbb{P}_A(B)=\mathbb{P}(B)$.*
(2) : **Formule des probabilités composées :** *si $\mathbb{P}(A_1\cap\cdots\cap A_n)>0$:*

$$\mathbb{P}(A_1\cap\cdots\cap A_n\cap B)=\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}_{A_1\cap A_2}(A_3)\dots\mathbb{P}_{A_1\cap\cdots\cap A_n}(B)$$

(3) : **Formule des probabilités totales :** *si $\Omega=\bigsqcup_n A_n$ (on dit que la famille (A_n) est un système complet d'événements) et $\forall n$, $\mathbb{P}(A_n)>0$:*

$$\mathbb{P}(B)=\sum_n \mathbb{P}_{A_n}(B)\mathbb{P}(A_n)$$

(4) : **Formule de** Bayes **:** *si (A_n) est un système complet d'événements et si de plus $\mathbb{P}(B)>0$:*

$$\mathbb{P}_B(A_i)=\mathbb{P}_{A_i}(B)\mathbb{P}(A_i)/\sum_n \mathbb{P}_{A_n}(B)\mathbb{P}(A_n)$$

Exercice 8 :

Deux archers tirent chacun leur tour sur une cible. Le premier qui touche a gagné. Le joueur qui commence a la probabilité p_1 de toucher à chaque tour et le second la probabilité p_2 (avec $p_1,p_2>0$)

1. *Quelle est la probabilité que le premier joueur gagne ?*
2. *Montrer qu'il est quasi-certain que le jeu se termine.*
3. *Pour quelle(s) valeur(s) de p_1 existe-t-il une valeur de p_2 pour laquelle le jeu est équitable ?*

Exercice 9 :

On lance une pièce avec la probabilité p de faire « Pile ». On note A_n l'événement

« on obtient pour la première fois deux piles consécutifs lors du n - ième lancer »

et l'on désire calculer sa probabilité a_n.

1. *Déterminer a_1, a_2 et a_3.*
2. *Exprimer a_{n+2} en fonction de a_n et a_{n+1} pour $n \geqslant 1$.*
3. *Justifier qu'il est quasi-certain d'obtenir deux piles consécutifs.*
4. *Déterminer le nombre d'essais moyen pour obtenir deux piles consécutifs.*

Exercice 10 :

— *Dans une population, la probabilité qu'une famille ait n enfants est estimée par la valeur*

$$p_n = \frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda} \text{ avec } \lambda \simeq 2$$

En supposant les sexes équiprobables et l'indépendance des sexes des enfants à l'intérieur d'une même famille, donner une estimation de la probabilité qu'une famille ait au moins une fille.

— *Dans une autre population, la probabilité p_n qu'une famille ait n enfants est donnée par la formule*

$$p_n = a\frac{2^n}{n!} \text{ avec } a > 0$$

1. *Déterminer la valeur de a.*

On suppose qu'il est équiprobable qu'un enfant soit une fille ou garçon.

2. *Calculer la probabilité qu'une famille ait au moins un garçon.*
3. *On suppose qu'une famille a exactement un garçon. Quelle est la probabilité que la famille comporte deux enfants ?*

Exercice 11 :

On effectue une suite de lancers indépendants d'une pièce équilibrée et l'on désigne par p_n la probabilité de ne pas avoir obtenu trois « Pile » consécutifs lors des n premiers lancers.

1. *Calculer p_1, p_2 et p_3.*
2. *Pour $n \geqslant 4$, exprimer p_n en fonction de p_{n-1}, p_{n-2} et p_{n-3}.*
3. *Déterminer la limite de la suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$.*

Exercice 12 : Chaines de Markov

Exemple : *dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau A,B et C.*
A l'instant t=0, il se trouve au point A.
Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau.
L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

On note A_n l'événement" l'animal est en A après son $n^{\text{ième}}$ trajet".
On note B_n l'événement" l'animal est en B après son $n^{\text{ième}}$ trajet".
On note C_n l'événement" l'animal est en C après son $n^{\text{ième}}$ trajet".
On pose $P(A_n) = a_n$, $P(B_n) = b_n$ et $P(C_n) = c_n$.

1. **a.** *Exprimer, en le justifiant, a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.*
   b. *Exprimer, de même, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.*
2. *Expliquer comment calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n en diagonalisant la matrice de transition.*
   Remarque *: Aucune expression finalisée de a_n, b_n et c_n n'est demandée.*

Généralisation : *problème type avec simulation numérique.*

Exercice 13 : Récurrence linéaire :

On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires.
L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.
On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :
on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.
On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.
Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1.
Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement la boule tirée au $n^{ième}$ tirage est blanche et on pose $p_n = P(B_n)$.

1. *Calculer p_1.*
2. *Prouver que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}$.*
3. *En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n.*

Exercice 14 :

1. *Énoncer et démontrer la formule de Bayes pour un système complet d'événements..*
2. *On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés.*
   Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\frac{1}{2}$.
   - **a.** *On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6.*
     Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
   - **b.** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*
     On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6.
     Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?
   - **c.** *Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.*

Exercice 15 : Un peu à part : du dénombrement

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments.
On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

1. *Montrer que la cardinal de $\mathcal{P}(E)$ est égal à 2^n.*
2. *Montrer qu'il existe autant de parties de E de cardinal pair que de parties de E de cardinal impair.*
3. *Déterminer le nombre a de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \subset B$.*
4. *Déterminer le nombre b de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.*
5. *Déterminer le nombre c de triplets $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.*