# Séries entières

## I — Rayon de convergence

**Définition** *(1)*

(1) : *Une* **série entière** *est une série de fonctions d'une variable complexe $z$ de la forme $A(z) = \sum_n a_n z^n$ avec $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.*
(2) : *Le* **domaine de convergence** *de la série entière $A$ est $D_a = \{z \in \mathbb{C}$ tel que $\sum_n a_n z^n$ converge$\}$*
(3) : *Le* **rayon de convergence** *de la série entière $A$ est $R_a = \sup\{|z|$ tel que $z \in D\} \in [0, +\infty]$ (bien défini car $0 \in D$).*

**Lemme d'Abel :** *(2)*

*Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée.*
*Alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.*

**Conséquence et définitions :** *(3)*

(1) : *Pour $|z| < R_a$, $\sum a_n z^n$ converge absolument et pour $|z| > R_a$, $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.*
*Ainsi, $\mathring{D}(0, R_a) \subset D_a \subset \overline{D}(0, R_a)$.*
(2) : *$\mathring{D}(0, R_a)$ est appelé* **disque ouvert de convergence** *et $]-R_a, R_a[$ est appelé* **intervalle ouvert de convergence**.
(3) : *Les séries entières $\sum |a_n| z^n$ et $\sum a_n z^n$ ont le même rayon de convergence (mais pas forcément le même domaine de convergence).*

**Exemples :** *(4)*

(1) : $\sum z^n$, (2) : $\sum z^n/n!$, (3) : $\sum n!\, z^n$.

**Calcul du rayon de convergence** *(5)*

*Les méthodes/remarques suivantes, toujours applicables, sont à privilégier :*
(1) : *$R_a = \sup\{r \geqslant 0$ tel que $(a_n r^n)$ est bornée $\}$.*
(2) : *$(a_n)$ est bornée $\Rightarrow R_a \geqslant 1$ ; $\sum |a_n|$ diverge $\Rightarrow R_A \leqslant 1$.*
(3) : *si $|a_n| \leqslant |b_n|$ alors $R_a \geqslant R_b$.*
(4) : *Si $a_n = O(b_n)$ alors $R_a \geqslant R_b$ ;*
(5) : *si $|a_n| \sim |b_n|$ alors $R_a = R_b$.*
*En particulier, les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.*

**Calcul du rayon de convergence (suite) : à utiliser avec précaution...** *(6)*

(1) : ***règle de*** D'Alembert ***des séries entières :*** **si** $a_n \neq 0$ **pour tout** $n$ *et $|a_{n+1}/a_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell \in [0, +\infty]$ alors $R_a = 1/\ell$.* ***Réciproque fausse.***
(2) : *Pour les séries entières "à trous" (par exemple $\sum \frac{z^{2n}}{n 2^n}$), la règle de* D'Alembert *des séries entières ne peut pas s'appliquer ! Si nécessaire, on utilisera plutôt la règle de* D'Alembert *des* **séries numériques** *à termes strictement positifs.*

**Exemples :** *(7)*

(1) : $\sum \frac{z^n}{n(n+1)}$,
(2) : $\sum n z^n$
(3) : $\sum 2^{(-1)^n} z^n$, *O(1)*
(4) : $\sum p_n z^n$ *où $p_n = n$-ème décimale de $\pi$.*
(5) : $\sum H_n \cdot z^n$,
(6) : $\sum \binom{2n}{n} \cdot z^n$,

**Exercice 1 :** Calculs

*Déterminer le rayon de convergence de la série entière proposée dans chacun des cas suivants :*

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n^2+1}{n^3+2} z^n$
2. $\sum_{n=0}^{+\infty} (\sqrt{n+2}-\sqrt{n}) z^n$
3. $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{2^n+n^2}{3^n-n^2} z^{3n}$
4. $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\ln(n^2+1)}{\ln(n^3+1)} z^n$
5. $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{\sin n} z^n$
6. $\sum_{n=1}^{+\infty} (\ln n)^n z^n$
7. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt{n}\right)^n z^n$
8. $\sum \exp(-\sqrt[3]{n}) z^n$
9. $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\ln(n!)\right)^2 z^n$
10. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\left(\operatorname{ch}\frac{1}{n}+\cos\frac{1}{n}\right)\right)^{n^4} z^n$
11. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{n^n} z^n$
12. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln(n!))^a}{n!^b} z^n$
13. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{1+b^n} z^n$, $(a,b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$

## II — Opérations sur les séries entières

**Théorème :** *(8)*

*Soient $A(z)=\sum_n a_n z^n$ et $B(z)=\sum_n b_n z^n$ deux séries entières de rayons $R_a$, $R_b$.*

(1) : ***Somme de deux séries entières :*** *la série entière $\sum (a_n+b_n) z^n$ a un rayon $R_c \geqslant \min(R_a, R_b)$ et pour $|z|<\min(R_a,R_b)$, $\sum_n (a_n+b_n)z^n = A(z)+B(z)$. Lorsque $R_a \neq R_b$, on a $R_c=\min(R_a,R_b)$.*

(2) : ***Produit (de Cauchy) de deux séries entières :*** *Soit $c_n=\sum_{i+j=n} a_i b_j$. La série $\sum c_n z^n$ a un rayon $R_c \geqslant \min(R_a,R_b)$ et pour $|z|<\min(R_a,R_b)$, on a $\sum_n c_n z^n = A(z)B(z)$.*

(3) : *Remarque : on peut avoir $R_c > \min(R_a,R_b)$ même si $R_a \neq R_b$ : par exemple pour les séries entières associées au produit : $(1+\frac{1}{1-z})(1-\frac{1/2}{1-z/2})=1$.*

**Exercice 2 :** Inverse d'une série entière :

*Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon $R>0$ et telle que $a_0=1$ (ou plus généralement $a_0\neq 0$).*

1. *Montrer qu'il existe une et une seule suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \delta_{0,n}$.*
2. *Montrer que la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ a un rayon strictement positif.*

## III — Propriétés analytiques

**Théorème de régularité** *(9)*

*Soit $A(z)=\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon $R>0$.*

(1) : **Convergence :** *la série converge normalement sur tout compact de $\mathring{D}(0,R)$, en particulier sur tout disque fermé $\overline{D}(0,r)$ avec $0<r<R$.*

(2) : **Continuité d'une série entière :** *la fonction $A$ est continue sur $\mathring{D}(0,R)$.*

(3) : **Dérivabilité et dérivation terme à terme d'une série entière :** *Pour $z_0\in\mathring{D}(0,R)$, on a*

$$\frac{A(z)-A(z_0)}{z-z_0} \underset{z\to z_0}{\longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z_0^n = A'(z_0).$$

(4) : **Dérivées successives d'une série entière :** *la fonction $A$ est indéfiniment dérivable sur $\mathring{D}(0,R)$ et*

$$\forall z\in\mathring{D}(0,R), A^{(p)}(z) = \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)\dots(n-p+1) a_n z^{n-p} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\dots(n+p) a_{n+p} z^n$$

(5) : **Primitive d'une série entière :** *Pour $x\in\,]-R,R[$,* $\displaystyle\int_0^x A(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$

**Conséquences :** *(10)*

(1) : $A^{(p)}(0)=p!\,a_p$.

(2) : $A(z)=\sum_{n=0}^{p} a_n z^n + O(z^{p+1})$.

(3) : **Unicité des coefficients d'une série entière :** *s'il existe $r>0$ tel que $\forall x\in\,]0,r[$, $A(x)=B(x)$ alors les suites $(a_n)$ et $(b_n)$ sont égales et $A(z)=B(z)$ pour tout complexe $z$ tel que l'une des deux séries converge.*

## IV — Développements en série entière

**Théorème - Définition : fonction analytique** *(11)*

*Soient $I$ un intervalle ouvert non trivial, $f : I \to \mathbb{C}$ et $x_0 \in I$. On dit que $f$ est analytique au voisinage de $x_0$ s'il existe une série entière $A(z) = \sum_n a_n z^n$ de rayon non nul et un réel $r > 0$ tels que $\forall\, h \in \,]-r, +r[$, $f(x_0 + h) = A(h)$. On dit que $f$ est analytique sur $I$ si elle est analytique au voisinage de tout point de $I$.*
*Une fonction analytique est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et son développement en série entière au voisinage de $x_0$ est unique : c'est son développement de* Taylor.

**Les 3 cas possibles :** *(12)*

*Pour $f : I \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $x_0 \in I$ donnés, il y a trois cas possibles.*
(1) : *La série de* Taylor *de $f$ en $x_0$ a un rayon nul : $f$ n'est pas analytique au voisinage de $x_0$ : exemple : $\sum_{n=0}^{\infty} \cos(n^2 x)/2^n$.*
(2) : *La série de* Taylor *de $f$ en $x_0$ a un rayon non nul mais sa somme n'est pas égale à $f$ au voisinage de $x_0$ : $f$ n'est pas analytique au voisinage de $x_0$ : $e^{-1/x^2}$.*
(3) : *La série de* Taylor *de $f$ en $x_0$ a un rayon $R > 0$ et sa somme coïncide avec $f$ sur $]x_0 - r, x_0 + r[$ : $f$ est analytique au voisinage de $x_0$. Il se peut que $r < R$.*

**Développements en série entière usuels** *(13)*

(1) : **Famille 1 :** exp, ch, sh, cos, sin *et les étendre à $\mathbb{C}$.*
(2) : **Famille 2 :** $z \mapsto \dfrac{1}{1-z}$, $z \mapsto \dfrac{1}{1+z}$, $z \mapsto \dfrac{1}{1-z^2}$, $z \mapsto \dfrac{1}{1+z^2}$ *puis* ln, arctan, *argth par développement de la dérivée.*
(3) : **Famille 3 :** $z \mapsto (1+z)^\alpha$
*puis* arcsin, *argsh par développement de la dérivée. fraction rationnelle* $\sum_n \binom{n+p}{p} z^n = (1-z)^{-p-1}$.
(4) : **Famille 4 :** *par une équation différentielle.*

**Exercice 3 :** Exemples

*Calculer les sommes suivantes dans leur intervalle ouvert de convergence après avoir déterminé le rayon de convergence de la série proposée.*

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n$
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)^2}{n} x^n$
3. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3+n^2-1}{n+1} x^n$
4. $\sum_{n=0}^{+\infty} (n^2+1)(-1)^n x^{2n}$
5. $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{sh}(n) x^n$
6. $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{(-1)^n} x^n$
7. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} x^n$
8. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3n}{n+2} x^n$
9. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}$
10. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{(2n+1)!} x^n$
11. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$
12. $\sum_{n=0}^{+\infty} (\mathrm{ch}\, n) x^n$
13. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) x^n$
14. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+4n-1}{n!(n+2)} x^n$
15. $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{(-1)^n} x^n$
16. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{4n-1}}{4n}$
17. $\sum_{n=0}^{+\infty} (n^2+1) 2^{n+1} x^n$
18. $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} n x^{2n+1}$
19. $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *où* $a_0 = a_1 = 1$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

**Exercice 4 :** DSE

*Pour les fonctions suivantes, montrer que $f$ est dSE et calculer son DSE en précisant le rayon de convergence.*

1. $\dfrac{x^3+2}{x^2-1}$
2. $(1-x)\ln(1-x)$
3. $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$
4. $\dfrac{\sin(4x)}{\sin(x)}$
5. $\dfrac{\sin x}{x}$
6. $\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$
7. $\int_0^x \cos(t^2)\,\mathrm{d}t$
8. $\cos x \,\mathrm{ch}\, x$

**Exercice 5 :** DSE

*Montrer que la fonction $f \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par* $f(x) = \int_0^\pi \cos(x \sin t)\,\mathrm{d}t$ *est dSE et calculer son DSE en précisant le rayon de convergence.*

**Exercice 6 :** Aux limites du domaine de convergence :

*Existence et calcul de* $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$.

**Exercice 7 :** Régularité :

*Montrer que la fonction définie par* $f(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ *pour* $x \neq 0$ *est prolongeable en 0 en une fonction de classe* $C^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$.

**Exercice 8 :** Produit de Cauchy

*Montrer que pour tout* $z \in \mathbb{C}$,

$$e^z \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot n!} z^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) \frac{z^n}{n!}.$$

**Exercice 9 :** Equation fonctionnelle

*Pour* $(\alpha, \lambda) \in \mathbb{R}^* \times ]-1,1[$ *fixé, trouver toutes les applications* $f \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dérivables telles que* $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \alpha f(x) + f(\lambda x)$. *On exprimera le résultat sous forme d'une série entière.*

**Exercice 10 :** Equation différentielle

*Pour* $\alpha \in \mathbb{R}^*$ *fixé, former le DSE(0) de* $f : x \mapsto \sin(\alpha \arcsin x)$.

**Exercice 11 :** Wallis

*Pour* $n \in \mathbb{N}$, *on pose* $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t \, dt$.

(1) : *Établir que* $W_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

(2) : *Rayon de convergence et somme de la série entière associée à la suite* $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$. *On pourra faire un changement de variables dans une intégrale en posant* $\cos t = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$ *où* $u = \tan(t/2)$.

**Exercice 12 :** Convergence uniforme sur des compacts

*Soient* $P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$ *et* $R > 0$ *donné. Montrer que pour* $n$ *suffisamment grand,* $P_n$ *n'a pas de racine dans le disque fermé de centre* $0$ *et de rayon* $R$.

**Exercice 13 :** Dénombrement par une équation fonctionnelle

1. *Soit* $E$ *un ensemble non vide muni d'une loi interne et* $a_n$ *le nombre de parenthésages possibles d'un produit de* $n$ *éléménts de* $E$ *((*$a_1 = 1$ *conventionnellement),* $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_4 = 5$, *...). Montrer que pour tout* $n \geqslant 2$, $a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}$.
2. *Soit* $f$ *la série entière associée à la suite* $(a_n)$. *On suppose momentanément le rayon* $R$ *de cette série strictement positif. Montrer que pour tout* $x$ *de* $]-R, R[$, $(f(x))^2 - f(x) + x = 0$.
3. *Calculer* $R$ *et* $f$.
4. *En déduire* $a_n$.