Espaces préhilbertiens

I — Rappels et compléments sur les espaces préhilbertiens et euclidiens

1) Produits scalaires et normes euclidiennes.

Définition *(1)*

(1) : *Un produit scalaire sur un $\mathbb{R}$-ev E est une forme bilinéaire, symétrique, définie positive :*

$$(.|.) : \left\{ \begin{array}{ccc} E^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & (x \mid y) \end{array} \right.$$

(2) : *Un espace préhilbertien E est un $\mathbb{R}$-ev muni d'un produit scalaire.*
(3) : *Un espace euclidien est un espace préhilbertien de dimension finie.*

Exemples classiques : *(2)*

(1) : $\mathbb{R}^n$ *avec* $(x|y) = \sum_k x_k y_k$ *(somme finie),*
(2) : $\mathbb{R}[X]$ *avec* $(P|Q) = \sum_{n \geqslant 0} a_n b_n$ *(somme finie)*
(3) : $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$ *avec* $(A|B) = Tr({}^t A \cdot B)$,
(4) : $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ *avec* $(f|g) = \displaystyle\int_{[a,b]} f(t) \cdot g(t) dt$ *ou plus généralement* $(f|g) = \displaystyle\int_{[a,b]} f(t) \cdot g(t) \omega(t) dt$ *avec* ω *positive, continue qui ne s'annule qu'en un nombre fini de points (fonction de pondération).*
(5) : $\mathcal{L}^2(I,\mathbb{R})$ *l'ensemble des fonctions de carrés intégrables sur* I *avec* $(f|g) = \displaystyle\int_I f \cdot g$
(on utilise que $|f \cdot g| \leqslant \dfrac{1}{2}(f^2 + g^2)$*).*
(6) : $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R})$ *l'ensemble des suites réelles de carrés sommables avec* $(u|v) = \sum_{n \geqslant 0} u_n v_n$.

Propriétés/Formules usuelles *(3)*

On note $\|x\|^2 = (x|x)$ *pour* $x \in E$. *Alors :*
(1) : $(x \mid y)^2 \leqslant \|x\|^2 \|y\|^2$ *avec égalité si et seulement si* (x,y) *est liée (Cauchy-Schwarz).*
(2) : $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ *avec égalité si et seulement si* (x,y) *est positivement liée (Minkowski).*
La fonction $\|.\| : x \mapsto \|x\|$ *est donc une norme (dite euclidienne associée au produit scalaire).*
(3) : *On en déduit que si* $\forall y \in E, (x|y) = 0_{\mathbb{R}}$, *alors* $x = 0_E$ *(réciproque triviale).*
(4) : $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x \mid y) + \|y\|^2$ *: identité remarquable.*
(5) : $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ *: identité du parallélogramme.*
(6) : $(x|y) = \dfrac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$ *: identité de polarisation permet d'exprimer le produit scalaire en fonction des normes (voir isométries).*
(7) : $\|x\|^2 - \|y\|^2 = (x+y \mid x-y)$.
(8) : *Pour* $x \neq 0_E$ *et* $y \neq 0_E$, *on peut définir* $\cos(x,y) = (x \mid y)/\|x\|\|y\| \in [-1,1]$.
(9) : $\|x\| = \max\{(x \mid y)$ *tel que* $\|y\| \leqslant 1\}$.

Remarque *(4)*

En général, dans un exercice d'algèbre bilinéaire, une norme euclidienne se manipule au carré !

2) Orthogonalité

Définitions *(5)*

(1) : *On dit que deux vecteurs a et b sont orthogonaux si $(a|b) = 0$. On note $a \perp b$.*
(2) : *On appelle* orthogonal d'un vecteur *l'ensemble $a^\perp = \{x$ tel que $(a \mid x) = 0\}$. On appelle* orthogonal d'une partie *l'ensemble $A^\perp = \{x$ tel que $\forall\, a \in A,\ (a \mid x) = 0\}$.*
(3) : *On dit que A et B sont orthogonales $\iff A \perp B \iff (\forall\,(a,b) \in A\times B,\ (a \mid b) = 0) \iff A \subset B^\perp \iff B \subset A^\perp$.*

Propriétés *(6)*

(1) : *Si $x_1, \ldots, x_n$ sont deux à deux orthogonaux, on dit que la famille $(x_1 \ldots x_n)$ est une famille orthogonale et alors $\|x_1 + \cdots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2$ (Pythagore).*
(2) : *$A \subset B \Rightarrow A^\perp \supset B^\perp$ et $A^\perp = Vect(A)^\perp$.*
(3) : *$A^\perp$ est un sev fermé de E pour la norme euclidienne associée et $A \cap A^\perp \subset \{0_E\}$.*
(4) : *Pour $a \neq 0$, $a^\perp$ est un hyperplan supplémentaire de $Vect(a)$.*
(5) : *$E^\perp = \{0\}$, $0^\perp = E$.*
(6) : *$A^{\perp\perp} \supset A$ (l'inclusion peut être stricte par exemple lorsque A n'est pas un s.e.v).*
(7) : *Si $F_1, \ldots, F_n$ sont 2 à 2 orthogonaux, alors la somme $F = F_1 + \cdots + F_n$ est directe et orthogonale et on la note $F = \overset{\perp}{\oplus} F_i$.*

Exemple *(7)*

$E = \mathbb{R}^n$, $a = (a_1, \ldots, a_n) \neq 0 \Rightarrow a^\perp = \{x$ tel que $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0\}$ (hyperplan de $\mathbb{R}^n$). $a^{\perp\perp} = Vect(a)$.

Théorème : Supplémentaire orthogonal : *(8)*

Soit F un sev de E. Les énoncés suivants sont équivalents.
(1) : *$F \oplus F^\perp = E$.*
(2) : *$\exists\, G$ tel que $F \perp G$ et $F \oplus G = E$.*
(3) : *$\forall\, a \in E,\ \exists\, b \in F$ tel que $\forall\, x \in F,\ (a \mid x) = (b \mid x)$.*
(4) : *$\forall\, a \in E,\ \exists\, c \in F$ tel que $\forall\, x \in F,\ d(a,c) \leqslant d(a,x)$, i.e. : $\forall\, x \in F, \|a - c\| \leqslant \|a - x\|$, c'est à dire que la distance de a à F est atteinte en un vecteur c.*
Lorsqu'ils sont vérifiés, on a $G = F^\perp$, $b = c =$ le projeté orthogonal de a sur F et $F^{\perp\perp} = F$.

Attention : *(9)*

En général, F et $F^\perp$ ne sont pas supplémentaires dans E et $F \neq F^{\perp\perp}$.

Exercice 1 : Contre-exemples

(1) : *Si $E = C^0([0,1])$ muni du produit scalaire $(f|g) = \int_{[0,1]} fg$ et F l'ensemble des fonctions polynomiales, montrer que $F \neq F^{\perp\perp}$.*
(2) : *Si $E = C^0([0,1])$ muni du produit scalaire $(f|g) = \int_{[0,1]} fg$ et $F = \{f \in E | f(0) = 0\}$, montrer que $F \neq F^{\perp\perp}$.*
(3) : *Si $E = \mathbb{R}[X]$ muni du p.s. $(A|B) = \sum_{n\geqslant 0} a_n b_n$ et $F = \{P \in \mathbb{R}[X] | P(1) = 0\}$, alors $F \neq F^{\perp\perp}$ en utilisant que $X^n - 1 \in F$ pour tout entier n.*

Théorème du supplémentaire orthogonal d'un espace de dimension finie : *(10)*

(1) : *Si F est un sev de dimension finie, alors $F \oplus F^\perp = E$ et $F^{\perp\perp} = F$.*
(2) : *Si F et G sont de dimensions finies alors $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.*

Exercice 2 :

(1) : *Montrer que pour F, G sev de E, on a l'égalité $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.*
(2) : *Montrer l'inclusion $(F \cap G)^\perp \supset F^\perp + G^\perp$.*
Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, $F = \{f \in E$ tel que $f_{|[0,\frac{1}{2}]} = 0\}$, $G = \{f \in E$ tel que $f_{|[\frac{1}{2},1]} = 0\}$.
(3) : *Montrer que $F^\perp = G$, $G^\perp = F$ puis que $F^\perp + G^\perp = F \oplus F^\perp = \{f$ tel que $f(\frac{1}{2}) = 0\}$ est strictement inclus dans $(F \cap G)^\perp = E$.*

II — Projection orthogonale

Théorème de la projection orthogonale : *(11)*

On suppose que F est un sev de E tel que $F \oplus F^\perp = E$.
En particulier, ce théorème s'applique **à tout sous espace vectoriel F de dimension finie**.
On peut alors définir π_F la projection (dite orthogonale) sur F parallèlement à $F^\perp$.
(1) : *Pour $a \in E$, $a = \pi_F(a) + \pi_{F^\perp}(a)$.*
(2) : **Caract. métrique du projeté orthogonal :** *si $a \in E$, $\pi_F(a)$ est l'élément de F le plus proche de a.*
(3) : *Pour $a \in E$ et $b \in F$, on a $(a \mid b) = (\pi_F(a) \mid b)$.*
(4) : *Pour $a, b \in E$, on a $(\pi_F(a) \mid b) = (\pi_F(a) \mid \pi_F(b)) = (a \mid \pi_F(b))$.*
(5) : *Pour $a \in E$, on a $\|\pi_F(a)\| \leqslant \|a\|$ avec égalité si et seulement si $a \in F$.*
(6) : **Expression dans une base orthonormale :**
Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de F alors $\pi_F(a) = \sum_i (e_i \mid a) e_i$.
(7) : *La symétrie orthogonale de base F est $\mathrm{id} - 2\pi_F$.*

Exercice 3 : Distance à un sous espace

Trouver a et b réels tels que $\displaystyle\int_0^\pi (\cos t - (at+b))^2 \,\mathrm{d}t$ soit minimale.

Exercice 4 : Droite des moindres carrés

Soient $A_1, \dots, A_n$ des points du plan de coordonnées $(x_1, y_1), \dots (x_n, y_n)$.
Comment déterminer l'équation $y = ax + b$ de la droite de réduction des moindres carrés telle que la somme $\sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b))^2$ soit minimale ? (on ne demande pas d'aller au bout des calculs)

Exercice 5 : Matrice d'une projection orthogonale

Soit $E = \mathbb{R}^4$, et $F = \{(x, y, z, t)$ tel que $x + y + z + t = 0\}$.
Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur F dans la base canonique
(réponse : $Mat_{can}(\pi_F) = I_4 - (\frac{1}{4})$.)

Théorème : Caractérisation des projections orthogonales : *(12)*

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ une projection (cad. $p^2 = p$).
On a : (p est une projection orthogonale) $\iff (\forall x, y \in E,\ (p(x) \mid y) = (x \mid p(y))) \iff (\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leqslant \|x\|)$.

III — Familles orthonormales

Définition - propriété *(13)*

(1) : *On dit que la famille $(e_i)_{i \in I}$ de E est orthonormale ssi $\forall (i,j) \in I^2, (e_i | e_j) = \delta_i^j$.*
(2) : *Une famille orthonormale est libre.*

Théorème *(14)*

Calcul dans une base orthonormale : Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une suite orthonormale et $F = Vect(e_1, \dots, e_n)$. Donc $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de F.
(1) : *Pour $x \in F$, on a $x = \sum_i (e_i | x) e_i$.*
(2) : *Pour $x, y \in F$, on a $(x \mid y) = \sum_i (e_i \mid x)(e_i \mid y)$.*
(3) : *Si $(x_1, \dots, x_n)$ est une base orthonormale de F alors $\det_{(e_1, \dots, e_n)}(x_1, \dots, x_n) = \pm 1$ (réciproque fausse).*

Théorème d'orthonormalisation de Schmidt *(15)*

Soit $(u_1, u_2, \dots, u_n, \dots)$ une suite finie ou infinie de vecteurs de E linéairement indépendants. Alors il existe une suite orthonormale $(e_1, e_2, \dots, e_n, \dots)$ de même cardinal vérifiant : $\forall i, Vect(e_1, \dots, e_i) = Vect(u_1, \dots, u_i)$.
De plus, chaque vecteur e_i est unique au signe près et unique si l'on impose la condition $(e_i \mid u_i) > 0$.

Exercice 6 : Exemple

(1) : *Orthonormaliser* $(1, X, X^2)$ *pour le produit scalaire* $(P|Q) = \int_{[0,1]} PQ$.

(2) : **Distance (le retour)** *: en déduire la projection orthogonale de* X^3 *sur* $\mathbb{R}_2[X]$ *pour ce produit scalaire et* $d(X^3, \mathbb{R}_2[X])$.

Conséquences *(16)*

(1) : *Un ev euclidien admet au moins une base orthonormale et toute famille orthonormale peut être complétée en base orthonormale.*

(2) : *Si* E *et* F *sont deux ev euclidiens de même dimension finie, alors il existe* $f \in \mathcal{L}(E, F)$ *bijective telle que* $(f(x) \mid f(y)) = (x \mid y)$ *pour tous* $x, y \in E$.

(3) : *Soit* $(e_1, \dots, e_n)$ *une suite orthonormale,* $F = Vect(e_1, \dots, e_n)$ *et* $x_1, \dots, x_n \in F$.
On a $|\det_{(e_1,\dots,e_n)}(x_1, \dots, x_n)| \leqslant \|x_1\| \dots \|x_n\|$ *avec égalité si et seulement si un des* x_i *est nul ou la famille* $(x_1, \dots, x_n)$ *est orthogonale (inégalité de* HADAMARD*).*

(4) : *Pour tout produit scalaire sur* $\mathbb{R}[X]$*, il existe une base orthonormale constituée de polynômes de degrés étagés et chaque terme de cette base est unique au signe près.*

Exemples *(17)*

L'espace $\mathbb{R}_n[X]$ *dispose d'une unique base orthogonale pour chacun des produits scalaires suivants telle que pour tout* $k \in [0, n]$*, le* $k^{\text{ème}}$ *polynôme est de degré* $k - 1$ *et de coefficients dominant égal à 1 :*

(1) : $(P|Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$ *(Polynômes de* LEGENDRE*)*

(2) : $(P|Q) = \displaystyle\int_{0}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$ *(Polynômes de* LAGUERRE*)*

(3) : $(P|Q) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2}dt$ *(Polynômes de* HERMITE*)*

(4) : $(P|Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$ *(Polynômes de* TCHEBYCHEV*)*

Exercice 7 : Polynômes de LEGENDRE

On définit $Q_n(X) = \frac{1}{2^n n!} \left((X^2 - 1)^n\right)^{(n)}$

1. *Soit* $n \geqslant 1$. *Montrer que* Q_n *possède* n *racines simples dans* $]-1\,; 1[$.
2. *Montrer que* $Q_n = X^n + (X^2 - 1)R_n(X)$ *avec* $R_n \in \mathbb{R}[X]$. *En déduire* $Q_n(1)$ *et* $Q_n(-1)$.
3. *On pose, pour* $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, $\langle P, Q \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$ *Montrer que* Q_n *est orthogonal à* $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
4. *Calculer* $\|Q_n\|^2$.

Définition : Suite totale *(18)*

La suite $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *est dite totale dans* E *si elle est orthonormale et si le sous-espace* $F = Vect(e_k,\ k \in \mathbb{N})$ *est dense dans* E.

Exemple : *(19)*

La suite des polynômes de LEGENDRE *est une suite totale dans* $E = \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ *pour le produit scalaire usuel car* $F = \mathbb{R}[X]$ *est dense dans* E *pour* $\| \ \|_\infty$ *donc aussi pour* $\| \ \|_2$.

Théorème *(20)*

Soit $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite totale dans E et $x, y \in E$. On a :
(1) : *la série $\sum_k (e_k \mid x)^2$ est convergente et $\sum_k (e_k \mid x)^2 \leqslant \|x\|^2$ (inégalité de* Bessel*) ;*
(2) : $(e_k \mid x) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *;*
(3) : $\sum_k (e_k \mid x)^2 = \|x\|^2$ *(égalité de* Parseval*) ;*
(4) : *la série $\sum_k (e_k \mid x)(e_k \mid y)$ converge vers $(x \mid y)$;*
(5) : *la série $\sum_k (e_k \mid x) e_k$ converge vers x.*

Application : *(21)*

Pour $f \in \mathcal{C}([-1,1], \mathbb{R})$, on pose $c_n(f) = \displaystyle\int_{[-1,1]} f P_n$ où P_n est le n-ème polynôme de Legendre*. Alors $c_n(f) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2(f) = \int_{[-1,1]} f^2$ et $\|f - \sum_{k=0}^{n} c_k(f) P_k\|_2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.*
Exemple avec $f(t) = e^t$.

IV — Travaux dirigés

Exercice 8 :

On note $E = \mathbb{R}[X]$ et on considère l'application $\varphi \colon E \times E \to \mathbb{R}$ donnée par $\varphi(P, Q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$

1. *Justifier que l'application φ est bien définie de $E \times E$ vers $\mathbb{R}$.*
2. *Montrer que l'application φ définit un produit scalaire sur E.*
3. *Pour $p, q \in \mathbb{N}$, calculer $\varphi(X^p, X^q)$.*
4. *Orthonormaliser par le procédé de Gram-Schmidt la famille $(1, X, X^2)$.*

Exercice 9 :

On munit $E = \mathcal{C}([a\,;b], \mathbb{R})$ du produit scalaire défini par $(f \mid g) = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ En exploitant le théorème d'approximation uniforme de Weierstrass, établir que l'orthogonal du sous-espace vectoriel F de E formé des fonctions polynomiales est réduit à $\{0\}$.

Exercice 10 :

On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$

1. *Établir l'existence et l'unicité d'une suite de polynômes (P_n) formée de polynômes deux à deux orthogonaux avec chaque P_n de degré n et de coefficient dominant 1.*
2. *Étudier la parité des polynômes P_n.*
3. *Prouver que pour chaque $n \geqslant 1$, le polynôme $P_{n+1} - XP_n$ est élément de l'orthogonal à $\mathbb{R}_{n-2}[X]$.*
4. *En déduire alors qu'il existe $\lambda_n \in \mathbb{R}$ tel que $P_{n+1} = XP_n + \lambda_n P_{n-1}$*

Exercice 11 :

On définit une application $\varphi\colon \mathbb{R}[X]\times\mathbb{R}[X]\to\mathbb{R}$ *par* $\varphi(P,Q)=\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$

1. *Montrer que* φ *définit un produit scalaire sur* $\mathbb{R}[X]$.
2. *Calculer* $\varphi(X^p,X^q)$.
3. *Déterminer* $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}(t^2-(at+b))^2\,\mathrm{d}t$

Exercice 12 :

Calculer

$$\inf\left\{\int_0^1 t^2(\ln t-at-b)^2\,\mathrm{d}t : (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

Exercice 13 :

Soit $w:[a,b]\to\mathbb{R}$ *une fonction strictement positive et continue. Pour* P *et* Q *dans* $\mathbb{R}[X]$, *on pose* $<P|Q>=\int_a^b P(t)Q(t)w(t)\,\mathrm{d}t$ *et on admet que c'est un produit scalaire.*

1. *Démontrer qu'il existe une unique suite de polynômes* (P_n) *formée de polynômes deux à deux othogonaux avec chaque* P_n *de degré* n *et de coefficient dominant égal à* 1.
2. *Montrer que pour tout* $n\geqslant 1$, $P_{n+1}-XP_n$ *est orthogonal à* $\mathbb{R}_{n-2}[X]$.
3. *En déduire que pour tout* $n\geqslant 1$, *il existe* a_n *et* b_n *réels tels que* $P_{n+1}=(X+a_n)P_n+b_nP_{n-1}$.

Exercice 14 : Polynomes de Laguerre

On pose pour tout entier naturel n *et pour tout réel* x *:*

$$h_n(x)=x^n\exp(-x)\ \textit{et}\ L_n(x)=\frac{\exp(x)}{n!}h_n^{(n)}(x).$$

1. *Calculer explicitement* L_0,L_1 *et* L_2.
2. *Montrer que pour tout entier* n, L_n *est une fonction polynomiale et préciser son degré et son coefficient dominant.*
3. *Pour tout* P,Q *dans* $\mathbb{R}[X]$, *on pose* $<P,Q>=\int_0^{+\infty}P(x)Q(x)\exp(-x)\,\mathrm{d}x$.
   Démontrer que $<.,.>$ *est bien défini.*
4. *Montrer que c'est un produit scalaire sur* $\mathbb{R}[X]$.
5. *Calculer pour tout* $n\in\mathbb{N}$ $<L_0,X^n>$.
6. **a.** *Montrer que pour tout* $k\in[0,n]$, *il existe* $Q_k\in\mathbb{R}[X]$ *tel que pour tout* $x\in\mathbb{R}$ *:*

   $$h_n^{(k)}(x)=x^{n-k}\exp(-x)Q_k(x).$$

   b. *Etablir que*

   $$\forall n\in\mathbb{N},\forall P\in\mathbb{R}[X],\forall p\in[0,n],<L_n,P>=\frac{(-1)^p}{n!}\int_0^{+\infty}h_n^{(n-p)}(x)P^{(p)}(x)\,\mathrm{d}x$$

   c. *En déduire que* (L_n) *est une famille orthonormée de* $\mathbb{R}[X]$ *pour* $<.,.>$.

Exercice 15 : Polynômes de Tchebychev

On rappelle l'existence d'un unique polynôme T_n de degré n tel que $\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.
Alors $\forall x \in [-1,1], T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$.

1. *Montrer que pour toute fonction f, g continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$, l'application $t \mapsto \dfrac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur $]-1,1[$.*

2. *On pose alors $< f, g >= \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$. Vérifier que cela définit bien un produit scalaire.*

3. *Calculer $< T_n, T_m >$ pour tous entiers naturels n et m. Conclure.*

Exercice 16 : CCP exercice 39 analyse

On note l^2 l'ensemble des suites $x = (x_n)$ de nombres réels telles que la série $\sum x_n^2$ converge.

1. a. *Démontrer que, pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$, la série $\sum x_n y_n$ converge.*

On pose alors $(x|y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$.

b. *Démontrer que l^2 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites de nombres réels.*

Dans la suite de l'exercice, on admet que $(\,|\,)$ est un produit scalaire dans l^2.
On suppose que l^2 est muni de ce produit scalaire et de la norme euclidienne associée.

2. *Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $x = (x_n) \in l^2$, on pose $\varphi(x) = x_p$.*
Démontrer que φ est une application linéaire et continue de l^2 dans $\mathbb{R}$.

3. *On considère l'ensemble F des suites réelles presque nulles, c'est-à-dire l'ensemble des suites réelles dont tous les termes sont nuls sauf peut-être un nombre fini de termes.*
Déterminer $F^\perp$ (au sens de $(\,|\,)$).
Comparer F et $\left(F^\perp\right)^\perp$.

Exercice 17 : CCP exercice 48 analyse

$C^0([0,1], \mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soit $f \in C^0([0,1], \mathbb{R})$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,dt = 0$.

1. *Énoncer le théorème de Weierstrass d'approximation par des fonctions polynomiales.*

2. *Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément sur le segment $[0,1]$ vers f.*

a. *Montrer que la suite de fonctions $(P_n f)_{n\in N}$ converge uniformément sur le segment $[0,1]$ vers f^2.*

b. *Démontrer que $\displaystyle\int_0^1 f^2(t)\ dt = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 P_n(t) f(t) dt$.*

c. *Calculer $\displaystyle\int_0^1 P_n(t)\, f(t)\, dt$.*

3. *En déduire que f est la fonction nulle sur le segment $[0,1]$.*

Exercice 18 : CCP exercice 76 algèbre

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\,|\,)$.
On pose $\forall\, x \in E$, $||x|| = \sqrt{(x|x)}$.

1. a. *Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.*

b. *Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.*

2. *Soit $E = \{f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}),\ \forall\, x \in [a,b]\ f(x) > 0\}$.*
Prouver que l'ensemble $\left\{\displaystyle\int_a^b f(t)dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}dt\ ,\ f \in E\right\}$ admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m.

Exercice 19 : CCP exercice 77 algèbre

Soit E un espace euclidien.

1. *Soit A un sous-espace vectoriel de E.*
Démontrer que $\left(A^{\perp}\right)^{\perp} = A$.

2. *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.*

a. *Démontrer que $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.*

b. *Démontrer que $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.*

Exercice 20 : CCP exercice 79 algèbre

Soit a et b deux réels tels que $a<b$.

1. *Soit h une fonction continue et positive de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.*

Démontrer que $\displaystyle\int_a^b h(x)dx = 0 \Longrightarrow h = 0$.

2. *Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.*
On pose, $\forall\,(f,g) \in E^2$, $(f|g) = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx$.
Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

3. *Majorer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}dx$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.*

Exercice 21 : CCP exercice 80 algèbre

Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. *Démontrer que $(f \mid g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,g(t)\,dt$ définit un produit scalaire sur E.*

2. *Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$.*

Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2 x$.

Exercice 22 : CCP exercice 82 algèbre

Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $n>0$.
On admet que pour tout $x \in E$, il existe un élément unique y_0 de F tel que $x - y_0$ soit orthogonal à F et que la distance de x à F soit égale à $\|x - y_0\|$.
Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on pose $(A \mid A') = aa' + bb' + cc' + dd'$.

1. *Démontrer que $(\,.\,|\,.\,)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.*

2. *Calculez la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.*