Endomorphismes d'un espace euclidien

I — Endomorphismes orthogonaux (Isométries vectorielles)

Définition *(1)*

Soit $(E,(.|.)$ un espace préhilbertien. On dit qu'une application $f : E \to E$ est orthogonale si et seulement si $\forall (x,y) \in E^2, (f(x) \mid f(y)) = (x \mid y)$. L'ensemble des applications orthogonales est noté $\mathcal{O}(E)$.
On dit aussi que f est une isométrie vectorielle.

Exemples : *(2)*

(1) : $\pm\,\mathrm{id}$,
(2) : *une symétrie s est une application orthogonale ssi s est une symétrie orthogonale.*
(3) : *réflexion (= symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan vectoriel),*

Contre Exemple : *(3)*

(1) : *Une projection orthogonale N'EST PAS un endomorphisme orthogonal en général.*

Propriétés *(4)*

(1) : *Toute application orthogonale est nécessairement linéaire et injective. Lorsque E est euclidien, c'est un isomorphisme.*
(2) : *La composée d'endomorphismes orthogonaux et la réciproque d'un endomorphisme orthogonal bijectif sont des endomorphismes orthogonaux.*
(3) : *Lorsque E est euclidien, $\mathcal{O}(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$ (groupe orthogonal de E).*
(4) : *Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E alors f est orthogonale $\iff M = Mat_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{O}(n)$, i.e. ${}^tMM = I_n$. Dans ce cas, $Mat_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = {}^tM$ (réciproque vraie) et $\det(f) = \pm 1$ (réciproque fausse).*
(5) : *Si $\dim(E) = n$ alors les groupes $\mathcal{O}(E)$ et $\mathcal{O}(n)$ (resp. $\mathcal{O}^+(E)$ et $\mathcal{O}^+(n)$) sont isomorphes.*
(6) : *En dimension finie, le déterminant d'une réflexion est égal à -1 et le déterminant d'une composée de p réflexions est égal à $(-1)^p$.*
(7) : *Les seules valeurs propres possibles pour un endomorphisme orthogonal sont ± 1. Lorsque -1 et 1 sont effectivement valeurs propres, les sous-espaces propres associés sont orthogonaux.*

Stabilité de l'orthogonal d'un s.e.v. de dimension finie : *(5)*

Si f est orthogonal et F est un sev stable par f alors $f_{|F}$ est orthogonal. De plus, si F est de dimension finie alors $F^\perp$ est aussi stable par f.

Exercice 1 : Endomorphismes orthogonaux diagonalisables

Caractériser les endomorphismes orthogonaux diagonalisables.

Caractérisations *(6)*

(1) : *Un endomorphisme orthogonal conserve la norme, les distances et les angles non orientés de vecteurs non nuls.*
(2) : *Une application linéaire conservant la norme est une application orthogonale. On parle aussi d'isométries vectorielles.*
(3) : *Une application conservant les distances et le vecteur nul est une application orthogonale.*
(4) : *Si E est un espace euclidien, alors f est orthogonale $\iff$ il existe une BON $\mathcal{B}$ de E telle que $f(\mathcal{B})$ est une BON de E $\iff$ pour toute BON $\mathcal{B}$ de E, $f(\mathcal{B})$ est une BON de E.*

Exercice 2 : Génération par les réflexions :

Soit E euclidien de dimension n, $f \in \mathcal{O}(E)$, $F = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$ et $p = n - \dim(F)$.
(1) : *Montrer qu'il existe des réflexions $s_1, \ldots, s_p$ telles que $f = s_1 \circ \cdots \circ s_p$.*
(2) : *Montrer de plus, que si $f = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_q$ est une décomposition quelconque de f en réflexions, alors $q \geqslant p$ et $q \equiv p \bmod 2$.*

Application : description de $\mathcal{O}(E)$ lorsque $\dim(E) \leqslant 3$. *(7)*

(1) : $\dim(E) = 0$ *:* $\mathcal{O}(E) = \{\mathrm{id}\}$.
(2) : $\dim(E) = 1$ *:* $\mathcal{O}(E) = \{\pm\,\mathrm{id}\}$.
(3) : $\dim(E) = 2$ *:* $\mathcal{O}^-(E) = \{\textit{réflexions}\}$ *et* $\mathcal{O}^+(E) = \{\textit{composées de deux réflexions}\} = \{\textit{rotations}\}$.

La matrice d'une réflexion dans une BON de E est de la forme $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.

L'axe de réflexion est engendré par le vecteur $\cos(\frac{1}{2}\theta)e_1 + \sin(\frac{1}{2}\theta)e_2$.

La matrice d'une rotation dans une BON de E est de la forme $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.

Cette matrice est identique dans toutes les bases orthonormales de E ayant même orientation et f est appelée : rotation d'angle $\pm\theta$ (le signe est fixé par le choix d'une orientation de E).

Exercice 3 :

Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (matrice d'un quart de tour) et $\theta \in \mathbb{R}$. Vérifier que $\exp(\theta J) = R_\theta$.

(4) : $\dim(E) = 3$ *:* $\mathcal{O}^+(E) = \{\textit{composées de deux réflexions}\} = \{\textit{rotations}\}$ *et* $\mathcal{O}^-(E) = -\mathcal{O}^+(E)$.

Si f est une rotation, il existe une base orthonormale (e_1, e_2, e_3) dans laquelle Mat$(f) = \begin{pmatrix} R_\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.

Lorsque $f \neq \mathrm{id}$, on a $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}) = Vect(e_3)$, et f est appelée : rotation autour de $Vect(e_3)$ d'angle $\pm\theta$ (le signe est fixé par le choix d'une orientation de $Vect(e_1, e_2) = Vect(e_3)^\perp$).

Exercice 4 : *Expression d'une rotation*

Vérifier que Tr $(f) = 1 + 2\cos\theta$ et que si (e_1, e_2, e_3) est une BON directe,
$f(x) = (\cos\theta)x + (1 - \cos\theta)(e_3 \mid x)e_3 + (\sin\theta)(e_3 \wedge x)$
Soit $g(x) = e_3 \wedge x$. Vérifier que $f = \exp(\theta g)$.

Si $-f$ est une rotation, il existe une BON (e_1, e_2, e_3) dans laquelle Mat$(f) = \begin{pmatrix} R_\theta & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.

Lorsque $f \neq -\mathrm{id}$, on a $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}) = Vect(e_3)$, et f est appelée : anti-rotation autour de $Vect(e_3)$ d'angle $\pm\theta$ (le signe est fixé par le choix d'une orientation de $Vect(e_1, e_2) = Vect(e_3)^\perp$).
$f = -\mathrm{id}$ est une anti-rotation d'angle π autour de n'importe quel axe.

Exercice 5 : *Expression d'une anti-rotation*

Vérifier que : Tr $(f) = -1 + 2\cos\theta$ puis que si (e_1, e_2, e_3) est une BON directe,
$f(x) = (\cos\theta)x - (1 + \cos\theta)(e_3 \mid x)e_3 + (\sin\theta)(e_3 \wedge x)$

Théorème : diagonalisation par blocs *(8)*

Soient E un ev euclidien non nul et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme orthogonal. Alors il existe des plans vectoriels $P_1, \ldots, P_k$ stables par f tels que $E = P_1 \oplus \cdots \oplus P_k \oplus \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(f + \mathrm{id})$ (somme orthogonale) et $f_{|P_i}$ est une rotation d'angle $\pm\theta_i$ avec $\theta_i \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. En conséquence, il existe une base $\mathcal{B}$ orthonormale dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs : Mat$_{\mathcal{B}}(f) = $ Diag$(R_{\theta_1}, \ldots, R_{\theta_k}, 1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1)$. Réciproquement, tout endomorphisme de E ayant une telle matrice dans une base orthonormale est un endomorphisme orthogonal.

Conséquences : *(9)*

Soit E un ev euclidien et $f \in \mathcal{O}(E)$. On a :
(1) : $\det(f) = (-1)^{\dim \operatorname{Ker}(f+\mathrm{id})}$.
(2) : *Si $f \in \mathcal{O}^-(E)$ alors -1 est valeur propre de f.*
(3) : *Si $f \in \mathcal{O}^+(E)$ et n est impair alors 1 est valeur propre de f.*
(4) : *Toute matrice orthogonale de déterminant 1 est l'exponentielle d'une matrice antisymétrique (non unique si $n \geqslant 2$). Réciproquement, l'exponentielle d'une matrice antisymétrique est orthogonale de déterminant 1.*
(5) : *$\mathcal{O}^+(n)$ et $\mathcal{O}^-(n)$ sont connexes par arcs.*

II — Endomorphismes symétriques

Définition *(10)*

Soit $(E, (.|.))$ un espace préhilbertien. On dit que l'endomorphisme $f : E \to E$ est symétrique si et seulement si $\forall (x, y) \in E^2$, $(f(x) \mid y) = (x \mid f(y))$.

Exemples : *(11)*

(1) : *homothétie, projection et symétrie orthogonales,*
(2) : *$f + f^{-1}$ pour $f \in \mathcal{O}(E)$,*
(3) : *$P \mapsto XP$ et $P \mapsto ((X^2-1)P')'$ sur $\mathbb{R}[X]$ pour le produit scalaire défini par $(P \mid Q) = \int_{[-1,1]} PQ$.*

Propriétés *(12)*

(1) : *Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E alors f est symétrique $\Longleftrightarrow$ $Mat_{\mathcal{B}}(f)$ est une matrice symétrique.*
(2) : *Les endomorphismes symétriques forment un sev de $\mathcal{L}(E)$. Si $\dim(E) = n$, sa dimension est $\frac{1}{2}n(n+1)$.*
(3) : *Les sous-espaces propres d'un endomorphisme symétrique sont deux à deux orthogonaux.*

Stabilité de l'orthogonal d'un s.e.v. stable : *(13)*

Si f est symétrique et F est un sev stable par f alors $f_{|F}$ est symétrique. De plus, $F^\perp$ est aussi stable par f.

Théorème : Caractérisation des projections orthogonales : (retour) *(14)*

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ une projection (cad. $p^2 = p$).
Les assertions suivantes sont équivalentes :
(1) : *p est une projection orthogonale*
(2) : *p est symétrique, i.e. $(\forall x, y \in E,\ (p(x) \mid y) = (x \mid p(y))$*
(3) : *$\forall x \in E$, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$.*

Caractérisation des symétries orthogonales : *(15)*

Les endomorphismes à la fois symétriques et orthogonaux sont exactement les symétries orthogonales.

Théorème spectral : *(16)*

Soient E un ev euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ symétrique.
(1) : *Alors E est la somme orthogonale des sous-espaces propres de f et* **il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ propre pour f.**
(2) : *Réciproquement, tout endomorphisme admettant une base orthonormale propre est symétrique.*

Exercice 6 : Exemple :

Soit l'endomorphisme $f = P \mapsto ((X^2-1)P')'$ *sur* $\mathbb{R}_n[X]$.

(1) : *Vérifier que* f *est symétrique pour le produit scalaire défini par* $(P \mid Q) = \int_{[-1,1]} PQ$.

(2) : *Vérifier que la matrice de* f *dans la base canonique de* $\mathbb{R}_n[X]$ *est triangulaire supérieure avec pour valeurs propres les nombres* $k(k+1)$, $k \in [\![0,n]\!]$.

(3) : *En déduire la dimension des sous-espaces propres. Retrouver que* f *est diagonalisable dans une base de vecteurs propres.*

(4) : *En utilisant le statut des polynômes* (L_n) *de Legendre, justifier que* L_n *est solution de l'équation différentielle* $((x^2-1)y')' = n(n+1)y$.

Théorème : Version matricielle du théorème spectral : *(17)*

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *symétrique* **à coefficients réels**.
Alors toutes les valeurs propres de M *sont réelles et* M *est diagonalisable au moyen d'une matrice orthogonale : il existe une matrice* $P \in \mathcal{O}(n)$ *telle que* $P^{-1}MP = {}^tPMP$ *est diagonale.*

Remarque : il existe des matrices symétriques complexes non diagonalisables, par exemple $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$.

III — Travaux dirigés

Exercice 7 :

$E = \mathbb{R}^3$ *euclidien orienté rapporté à une base orthonormée directe* $\mathcal{B}$. *Etudier les endomorphismes de matrice* A *dans* $\mathcal{B}$ *suivants :*

$$1)\ A = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad 2/\ A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix} \quad 3/\ A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \\ 1 & 8 & -4 \end{pmatrix}.$$

1. $A \in O_3^+(\mathbb{R})$ *est la matrice de la rotation autour de* $u = (-3,1,1) \in \mathrm{Ker}(A-I)$ *et d'angle* $\pm\arccos(-5/6)$. *Pour déterminer le signe, on peut calculer le signe de* $\det(i, f(i), u)$ *qui est le même que* $\sin(\theta)$, *ici négatif.*
2. $A \in O_3^+(\mathbb{R})$ *est la matrice de la rotation autour de* $u = (1,1,0) \in \mathrm{Ker}(A-I)$ *et d'angle* $\pi/3$.
3. $A \in O_3^-(\mathbb{R})$ *n'est pas symétrique, donc n'est pas la matrice d'une réflexion. C'est donc la matrice d'une anti-rotation* $s \circ r$ *où* s *est une réflexion par rapport au plan orthogonal à* u *et* r *une rotation autour de* $u = (1,3,-5) \in \mathrm{Ker}(A+I)$.

Exercice 8 :

Justifier que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable et trouver P *telle que* ${}^tPAP$ *soit diagonale.*
$Sp(A) = \{-3, 3\}$ *et* E_3 *est le plan d'équation* $x+y+z=0$. *Donc* $E_{-3} = vect(1,1,1)$.
Après G-S, on obtient par exemple $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$

Exercice 9 :

On munit l'espace $E = \mathcal{C}([0\,;1], \mathbb{R})$ *du produit scalaire*

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pour $f \in E$, *on note* F *la primitive de* f *qui s'annule en 0*

$$\forall x \in [0\,;1], F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

et on considère l'endomorphisme v *de* E *déterminé par* $v(f) = F$.

1. *Déterminer par une intégration par parties un endomorphisme* v^* *vérifiant*

$$\forall (f,g) \in E^2, \langle v(f), g \rangle = \langle f, v^*(g) \rangle.$$

après IPP, on trouve $v^*(g) : x \mapsto G(1) - G(x) = \int_x^1 g(t)dt$

2. *Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme* $v^* \circ v$.

Nécessairement, $\lambda f(1) = 0$ *et* $\lambda f'(0) = 0$ *et* $f + \lambda f'' = 0$. *Si* $\lambda = 0$, *alors* $f = 0$ *et* 0 *n'est pas valeur propre. Si* $\lambda > 0, f(t) = 1 * \cos(\dfrac{1}{\sqrt{\lambda} t} + 0 \sin(...)$ *est un vecteur propre si* $\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} \in \pi/2 + \pi\mathbb{N}$.

Si $\lambda < 0$, *ce n'est pas une valeur propre.*

Donc $^{(}v^* \circ v) = \pi/2 + \pi\mathbb{N}$.

Exercice 10 :

Soit u *un endomorphisme symétrique à valeurs propres positives d'un espace vectoriel euclidien* E.

1. *Montrer qu'il existe un endomorphisme* v *symétrique à valeurs propres positives tel que* $u = v^2$.

Dans une BON diagonalisant u, *la matrice st diagonale avec une sigonale strictement positive. On pose alors* v *dont la matrice est donnée par une diagonale de racines carrées des valeurs propres de* u. v *est symétrique car sa matrice est symétrique dans la BON considérée.*

2. *Établir l'unicité de* v *en étudiant l'endomorphisme induit par* v *sur les sous-espaces propres de* u.

OK

On note $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ *le sous-ensemble de* $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ *constitué des matrices de valeurs propres strictement positives. Soit* $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

3. *Établir que* ${}^tAA \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

La matrice ${}^tAA$ *est symétrique par construction. Si* λ *est une vp associée à* X, *alors* ${}^tX{}^tAAX = ||AX||^2 = \lambda||X||^2$ *donc* $\lambda = \dfrac{||AX||^2}{||X||^2} > 0$ *car* A *est inversible.*

4. *Montrer qu'il existe une matrice* $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ *telle que* $S^2 =^t AA$.

Par le théorème spectral , ${}^tP{}^tAAP = diag(>0)$ *La matrice* $S =^t Pdiag(\sqrt{>0})P$ *est alors solution.*

5. *Conclure*

$$\forall A \in \underset{n}{\mathrm{GL}}(\mathbb{R}), \exists (O, S) \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}), A = OS.$$

Posons $O = AS^{-1}$. *Alors* $A = OS$ *et* ${}^tOO =^t S^{-1}\,{}^tAAS^{-1} = I_n$ *donc* $O \in O_n(\mathbb{R})$ *et* $A = OS$.

6. *Établir l'unicité de cette écriture.*

Si $A = OS$, $S^2 =^t AA$. *Pour* $\lambda \in Sp({}^tAA)$, $\mathrm{Ker}({}^tAA - \lambda I_n) = \mathrm{Ker}(S^2 - \lambda I_n)$.

Par lemme des noyaux, $.. = \mathrm{Ker}(S - \sqrt{\lambda} I_n) \oplus \mathrm{Ker}(S + \sqrt{\lambda} I_n)$ *car* $\lambda > 0$. *Or* $\mathrm{Ker}(S + \sqrt{\lambda} I_n) = \{0\}$ *car* $Sp(S) \subset \mathbb{R}_+^*$. *Donc* $\mathrm{Ker}({}^tAA - \lambda I_n) = \mathrm{Ker}(S - \sqrt{\lambda} I_n)$. *Donc* S *est déterminée de manière unique.* O *l'est donc aussi.*

IV — Endomorphismes antisymétriques

On dit que $f : E \to E$ est antisymétrique si $\forall\, x, y \in E$, $(f(x) \mid y) = -(x \mid f(y))$.

Exercice 11 : Exemples :

Montrer que les applciations suivantes sont antisymétriques
- un quart de tour dans un plan,
- $f - f^{-1}$ pour $f \in \mathcal{O}(E)$,
- $P \mapsto (X^2-1)P' + XP$ sur $\mathbb{R}[X]$ pour le produit scalaire défini par $(P \mid Q) = \int_{[-1,1]} PQ$.

Exercice 12 : Propriétés

Montrer les propriétés suivantes :

1. *L'application nulle est la seule qui soit à la fois symétrique et antisymétrique.*
2. *Le carré d'une application antisymétrique est symétrique (réciproque fausse).*
3. *si $f \in \mathcal{L}(E)$, alors f est antisymétrique si et seulement si $\forall\, x \in E$, $f(x) \perp x$ (faux sans la linéarité de f).*
4. *Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E alors f est antisymétrique $\Longleftrightarrow Mat_{\mathcal{B}}(f)$ est une matrice antisymétrique.*
5. *Les endomorphismes antisymétriques forment un sev de $\mathcal{L}(E)$. Si $\dim(E) = n$, sa dimension est $\frac{1}{2}n(n-1)$.*
6. *La seule valeur propre possible pour un endomorphisme antisymétrique est 0. Lorsque E est de dimension finie impaire, alors 0 est effectivement valeur propre et f est non bijectif.*
7. *Si f est antisymétrique et F est un sev stable par f alors $f_{|F}$ est antisymétrique. De plus, $F^\perp$ est aussi stable par f.*

Exercice 13 : Théorème : Diagonalisation par blocs

Soient E un ev euclidien non nul et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme antisymétrique. Montrer qu'il existe des plans vectoriels $P_1, \dots, P_k$ stables par f tels que $E = P_1 \oplus \cdots \oplus P_k \oplus \mathrm{Ker}(f)$ (somme orthogonale) et $f_{|P_i}$ est la composée d'une homothétie et d'un quart de tour.
En conséquence, il existe une base $\mathcal{B}$ orthonormale dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs : $Mat_{\mathcal{B}}(f) = Diag(A_1, \dots, A_k, 0, \dots, 0)$ avec $A_i = \begin{pmatrix} 0 & -a_i \\ a_i & 0 \end{pmatrix}$ et $a_i \in \mathbb{R}^*$. Réciproquement, tout endomorphisme de E ayant une telle matrice dans une base orthonormale est un endomorphisme antisymétrique.

Exercice 14 : Conséquences

1. *En dimension finie, un endomorphisme antisymétrique est de rang pair.*
2. *En dimension 3, les endomorphismes antisymétriques sont les applications de la forme $x \mapsto a \wedge x$ avec $a \in E$, entièrement déterminé par l'endomorphisme considéré.*