SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

E, F peuvent désigner des espaces vectoriels normés de dimensions finies, mais en pratique, on aura souvent affaire à $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les fonctions étudiées sont définies sur une partie D de E et à valeurs dans F.

I — Modes de convergence d'une suite ou une série de fonctions

Définitions : *(1)*

Soient $D \subset E$ non vide, (f_n) une suite de fonctions de D dans F et $f : D \to F$. On dit que la suite (f_n) converge vers la fonction f ...

(1) : UNIFORMÉMENT *s'il existe une suite (ε_n) de limite nulle telle que $\forall\, x \in D$, $\|f_n(x) - f(x)\| \leqslant \varepsilon_n$;*

(2) : uniformément sur tout compact *si pour tout compact non vide $K \subset D$, la restriction de f_n à K converge uniformément vers la restriction de f à K. Lorsque D est un intervalle de $\mathbb{R}$, on peut se limiter aux cas où K est un segment.*

(3) : localement uniformément *si pour tout $x_0 \in D$, il existe un voisinage relatif de x_0, $V \subset D$ tel que la restriction de f_n à V converge uniformément vers la restriction de f à V ;*

(4) : SIMPLEMENT *si $\forall\, x \in D$, $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$;*

Lien entre ces notions : *(2)*

(1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (4) et (1) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4). Les implications réciproques sont fausses en général.

Caractérisation de la convergence uniforme par la norme uniforme : *(3)*

La suite (f_n) converge uniformément vers la fonction f sur D si et seulement si à partir d'un certain rang, chaque fonction $f_n - f$ est bornée sur D et $\|f_n - f\|_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Définitions : *(4)*

Soient $D \subset E$ non vide, (f_n) une suite de fonctions de D dans F et $f : D \to F$. On dit que la série $\sum f_n$ converge vers la fonction f ...

(1) : NORMALEMENT *s'il y a convergence simple et s'il existe une suite (a_n) réelle positive telle que $\forall\, x \in D$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\|f_n(x)\| \leqslant a_n$ et $\sum_n a_n < +\infty$;*

(2) : localement normalement, normalement sur tout compact *si la propriété précédente est vraie au voisinage relatif de tout point de D ou sur tout compact inclus dans D (la suite (a_n) peut dépendre du voisinage ou du compact considéré).*

(3) : UNIFORMÉMENT *si la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)$ converge uniformément vers f ;*

(4) : localement uniformément, uniformément sur tout compact *si la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)$ converge de cette manière vers f ;*

(5) : SIMPLEMENT *si $\forall\, x \in D$, $\sum_n f_n(x) = f(x)$;*

Lien entre ces notions : *(5)*

(1) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (5) et (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (5) .
Les convergences uniformes impliquent la convergence uniforme de même type pour les suites de fonctions (f_n) et $\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k\right)$ vers la fonction nulle.

Caractérisation de la convergence normale d'une série de fonctions : *(6)*

La série $\sum f_n$ converge normalement si et seulement si chaque fonction f_n est bornée et $\sum_n \|f_n\|_\infty < +\infty$.

Exemples : *(7)*

On rappelle les exemples de référence :
Soit $f_n(x) = x^n$ et $g_n(x) = \dfrac{x^n}{n}$. Alors :

	C.S.	C.U.C	C.U	
La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$	non	non	non	sur $[-1,1]$
La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$	oui	non	non	sur $]-1,1]$
La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$	oui	oui	non	sur $]-1,1[$
La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$	oui	oui	oui	sur $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$
La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$	oui	oui	oui	sur $[-1,1]$

	C.S.	C.U.C	C.U	C.N.C	C.N	
La série $\sum_n f_n$	non	non	non	non	non	sur $]-1,1]$
La série $\sum_n f_n$	oui	oui	non	oui	non	sur $]-1,1[$
La série $\sum_n f_n$	oui	oui	oui	oui	oui	sur $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$
La série $\sum_n g_n$	non	non	non	non	non	sur $[-1,1]$
La série $\sum_n g_n$	oui	oui	non	non	non	sur $[-1,1[$
La série $\sum_n g_n$	oui	oui	oui	oui	oui	sur $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$
La série $\sum_n g_n$	oui	oui	oui	non	non	sur $[-1, 1-\varepsilon]$

II — Passage à la limite d'une suite de fonctions :

1) Propriétés préservées par passage à la limite (les choses qui marchent) :

Cas d'une limite simple : *(8)*

Toute inégalité large et toute égalité faisant intervenir un nombre FIXÉ *(indépendant de n) de points est conservée par limite simple. En particulier :*

(1) : *une limite simple de fonctions* **positives** *ou nulles est positive ou nulle.*
(2) : *une limite simple de fonctions* **croissantes** *est croissante.*
(3) : *une limite simple de fonctions* **convexes** *est convexe.*
(4) : *une limite simple de fonctions* **k-lipschitziennes** *est k-lipschitzienne (k constant).*
(5) : *une limite simple de fonctions* **linéaires** *est linéaire.*

Cas d'une limite uniforme : *(9)*

(1) : *Toutes les propriétés de limite simple (voir paragraphe précédent),*
(2) : *Une limite uniforme de fonctions* **bornées** *est bornée.*
(3) : *Une limite uniforme de fonctions* **continues** *est continue.*
(4) : **Primitiver :** *si les fonctions $f_n : I$ (intervalle) $\to E$ sont continues sur I et convergent uniformément vers la fonction f alors pour tous $a, b \in I$ on a $\displaystyle\int_a^b f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f$. De plus, pour a fixé, les fonctions $F_{a,n} : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f_n$ convergent uniformément sur tout compact vers la fonction $F_a : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$.*
(5) : **Dériver :** *si les fonctions f_n convergent simplement vers la fonction f et si leurs dérivées f_n' convergent uniformément vers une fonction g alors f est dérivable et $f' = g$.*

Remarques : *(10)*

(1) : *Le résultat de passage à la limite sous le signe intégral* sur tout compact NE PERMET PAS *de passer à la limite sous une intégrale généralisée, même en cas de convergence uniforme sur I ; dans un tel cas utiliser le* THÉORÈME DE CONVERGENCE DOMINÉE
(2) : *La limite uniforme d'une suite de fonctions dérivable (et même de classe C^∞) n'est pas forcément dérivable.*

Exercice 1 : Généralisation :

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons que les fonctions f_n soient de classe C^k et que :
(1) : *pour tout $p \in [0, k-1]$, la suite $(f_n^{(p)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement ;*
(2) : *la suite $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact de I ;*
Montrer alors que la limite simple f de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de classe C^k et pour tout $p \in [0, k]$:

$$\forall x \in I, f^{(p)}(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n^{(p)}(x).$$

2) Comportement asymptotique : théorème de la double limite

Théorème de la double limite FINIE, cas continu : *(11)*

Soient $D \subset E$ non vide, (f_n) une suite de fonctions $D \to F$, f une fonction de D dans F et $a \in \overline{D} \cup \{\pm\infty\}$ tq :
(1) : *$\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell_n$;*
(2) : *si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément au voisinage de a vers f, c'est à dire qu'il existe V, voisinage relatif de a dans D tel que (f_n) converge uniformément vers f sur V.*
Alors il existe $\ell \in E$ tel que $\ell_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$: c'est à dire $\lim_{n\to\infty}(\lim_{x\to a} f_n(x)) = \lim_{x\to a}(\lim_{n\to\infty} f_n(x))(= \ell)$.

Remarque : *(12)*

Les théorèmes de la double limite sont inapplicables si la limite double visée est infinie. Dans un tel cas, utiliser par exemple le théorème des gendarmes pour conclure (par exemple une minoration par une fonction ou une suite tendant vers $+\infty$).

Exercice 2 : Exemple :

En remarquant que $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \geqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x}$, montrer que $\zeta(x) \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} +\infty$.

3) Les choses qui ne marchent pas :

Exercice 3 : Là ou la convergence simple n'est pas suffisante :

(1) : *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $f_n(x) = x^n$. Quelle est la limite simple de f ? Cette fonction est-elle encore continue sur $[0, 1]$?*
Autrement dit, $\lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to1} f_n(x) \neq \lim_{x\to1} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$.
(2) : *Déterminer une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ continues sur $[0, 1]$ et f telles que $f_n \overset{C.S}{\longrightarrow} f$ et $\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,1]} f_n \neq \int_{[0,1]} f$.*

Exercice 4 : Là où même la convergence uniforme n'est pas suffisante :

(1) : *Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$ converge uniformément vers la fonction valeur absolue sur $[0, 1]$. En déduire qu'une limite uniforme de fonctions de classe C^∞ n'est pas forcément dérivable.*
(2) : *Pouvait-on s'y attendre en utilisant le théorème de Stone et Weierstrass ?*

4) Adaptation des théorème de passage à la limite au cas d'une série de fonctions

Cas de la convergence simple : *(13)*

Les mêmes que pour la limite d'une suite de fonctions à l'exception du caractère lispchitzien.

Cas de la convergence localement uniforme : *(14)*

(1) : *La somme d'une série localement uniformément convergente de fonctions continues est continue.*
(2) : **Dérivation terme à terme :** *si la série* $\sum f_n$ *converge simplement vers la fonction* f *et si la série des dérivées* $\sum f'_n$ *converge localement uniformément vers une fonction* g *alors* f *est dérivable et* $f' = g = \sum_n f'_n$.

Cas de la convergence uniforme sur tout compact : *(15)*

(1) : *La somme d'une série de fonctions* **continues** *convergeant uniformément uniformément sur tout compact est continue.*
(2) : *Si les fonctions* $f_n : I$ *(intervalle)* $\to E$ *sont continues sur* I *et* $\sum f_n$ *converge uniformément sur tout compact vers la fonction* f *alors pour tous* $a, b \in I$ *on a* $\sum_n \int_a^b f_n = \int_a^b f$ *(deuxième théorème d'***intégration terme à terme***). De plus, pour* a *fixé, la série de fonctions* $x \mapsto \sum_n \int_a^x f_n$ *converge uniformément sur tout compact vers la fonction* $x \mapsto \int_a^x f$.

Remarque : *(16)*

Ce théorème ne permet pas d'intégrer terme à terme sous une intégrale généralisée ; dans un tel cas utiliser le théorème d'intégration terme à terme de Beppo Levi *ou bien le théorème de convergence dominée.*

Cas de la convergence uniforme : *(17)*

Les mêmes que pour la limite d'une suite de fonctions à l'exception du caractère lispchitzien.

Cas de la convergence normale (localement normale, normale sur tout compact) : *(18)*

Les mêmes que pour la convergence uniforme de même type.

Exercice 5 :

Pour $x \in]0, +\infty[$, *on pose* $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x+k}$. *Montrer que* f *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $]0, +\infty[$.

En regroupant les termes 2 à 2, justifier : $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

III — Fonction définie par une intégrale à paramètre

1) Position du problème

Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$ non triviaux et $f : I \times J \ni (x,t) \to f(x,t) \in E$. On pose pour $x \in I$, sous réserve d'existence : $F(x) = \displaystyle\int_{t \in J} f(x,t)\,\mathrm{d}t$.

Continuité partielle : *(19)*

On dit que f *est continue (resp. continue par morceaux) par rapport à* t *si pour tout* $x \in I$, *la fonction* $t \mapsto f(x,t)$ *est continue sur* J *(resp. continue par morceaux, le découpage en morceaux pouvant dépendre de* x*). On définit de même la continuité et la continuité par morceaux par rapport à* x.

Domination locale : *(20)*

On dit que f est localement dominée en x si pour tout $x_0 \in I$, il existe un voisinage relatif $V = [x_0-\alpha, x_0+\alpha] \cap I$ et une fonction $\varphi : J \to \mathbb{R}$ continue par morceaux, intégrable sur J telle que : $\forall\,(x,t) \in V \times J,\ \|f(x,t)\| \leqslant \varphi(t)$.

Remarque : *(21)*

On ne traite pas ici les intégrales de la forme $\displaystyle\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t$. En présence d'une telle intégrale, effectuer un changement de variable ou une transformation simple permettant soit de revenir à des bornes constantes, soit d'éliminer x de l'intégrande. Par exemple :

$$\int_0^x f(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 x f(x,ux)\,\mathrm{d}u.$$

$$\int_x^{x^2} \mathrm{e}^t f(x-t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^{x-x^2} e^{x-u} f(u)\,\mathrm{d}u = -e^x \int_0^{x-x^2} e^{-u} f(u)\,\mathrm{d}u.$$

2) Continuité, dérivation d'une fonction définie par une intégrale à paramètre.

Théorèmes de régularité *(22)*

On reprend les notations qui précèdent, et on suppose que pour tout $x \in I$, $F(x) = \displaystyle\int_{t\in J} f(x,t)\,\mathrm{d}t$ existe, c'est-à-dire que f est continue par morceaux par rapport à t et que à x fixé, l'intégrale $\displaystyle\int_{t\in J} f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

(1) : **continuité d'une intégrale à paramètre :** *si f est continue par rapport à x et localement dominée en x alors $F : x \mapsto F(x)$ est continue sur I.*

(2) : **dérivabilité d'une intégrale à paramètre :** *si f admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ définie sur $I \times J$, continue par morceaux par rapport à t, continue par rapport à x et localement dominée en x alors F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $F'(x) = \displaystyle\int_{t\in J} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$*

Généralisation *(23)*

Soit pour tout $x \in I$, $F(x) = \displaystyle\int_{t\in J} f(x,t)\,\mathrm{d}t$. Si :

(1) : *$\forall k \in [0, n-1]$, f admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}$ définie sur $I \times J$, continue par morceaux par rapport à t et intégrable,*

(2) : *et f admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}$ définie sur $I \times J$, continue par morceaux par rapport à t, continue par rapport à x et localement dominée en x ,*

Alors F est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et $F^n(x) = \displaystyle\int_{t\in J} \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\,\mathrm{d}t$

Exercice 6 : Convergences et intégrales

Soit la suite de fonctions $(f_n)_{\mathbb{N}}$ *définies sur* $[0,1]$ *par* $f_n(x) = x^n(1-x)$.

1. *Montrer que la suite* (f_n) *converge simplement vers la fonction nulle sur* $[0,1]$.
2. *Montrer que* f *admet un maximum en* $\frac{n}{n+1}$ *et calculer ce maximum.*
3. *La suite* (f_n) *converge-t-elle uniformément sur* $[0,1]$ *?*
4. *Calculer* $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 f_n(t)dt$.
5. *Reprendre les questions précédentes avec* $f_n(x) = \sqrt{n}x^n(1-x)$, $f_n(x) = nx^n(1-x)$, $f_n(x) = n^2x^n(1-x)$.

Exercice 7 : Convergence uniforme sur les compacts

On considère la suite de fonctions (f_n) *définies sur* $[0,+\infty[$ *par* $f_n(x) = \ln(1+x/n)$ *pour* $x \in [0,+\infty[$.

1. *Montrer que la suite* (f_n) *converge simplement vers la fonction nulle sur* $\mathbb{R}^+$.
2. *Montrer que la suite* (f_n) *converge uniformément sur tout intervalle* $[0,A]$ *avec* $A \in \mathbb{R}^+$.
3. *La convergence est-elle uniforme sur* $[0,+\infty[$ *?*
4. *Reprendre les questions avec* $f_n(x) = \dfrac{1}{1+x}\ln(1+\frac{x}{n})$ *puis* $f_n(x) = \dfrac{1}{1+x^2}\ln(1+\frac{x}{n})$.

Exercice 8 :

On considère la suite de fonctions (f_n) *définies sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f_n(x) = \dfrac{x}{(1+x^2)^n}$.

1. *Montrer que la suite* (f_n) *converge simplement vers la fonction nulle sur* $\mathbb{R}$.
2. *Montrer que* $|f_n|$ *admet un maximum en* $\pm\sqrt{\frac{1}{2n-1}}$ *et calculer ce maximum.*
3. *Montrer que la suite* (f_n) *converge uniformément sur* $\mathbb{R}$.
4. *Calculer* $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$ *et vérifier que la limite est nulle.*
5. *On pose* $s_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_n(x)$. *Calculer* $s_n(x)$.
6. *Calculer* $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{n\to+\infty} s_n(x)$ *et* $\lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to 0} s_n(x)$.
7. *Pour chacun des intervalles* I *suivants, la suite* (s_n) *converge-t-elle uniformément sur* I *?*
   $I = \mathbb{R}; I = \mathbb{R}_+^*; I = [1/A, A], I = [-1/A, A]$ *pour* $A > 0$.

Exercice 9 : Limite uniforme de polynôme sur $\mathbb{R}$

Soit (P_n) *une suite de fonctions polynomiales qui converge uniformément sur* $\mathbb{R}$ *vers une fonction* f.

1. *Montrer qu'il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $n \geqslant n_0$, $|P - P_{n_0}| \leqslant 1$.
2. *En déduire que pour tout* $n \geqslant n_0$, $P_n = P_{n_0} - P_{n_0}(0) + P_n(0)$.
3. *En déduire que* f *est une fonction polynomiale.*

Exercice 10 :

On considère la suite de fonctions (f_n) *définies sur* $\mathbb{R}$ *par* $f_n(x) = xe^{-nx^2}$.

1. *Monter que la suite* (f_n) *converge uniformément vers la fonction nulle sur* $\mathbb{R}$.
2. *Calculer* $f_n'(x)$. *Montrer que* (f_n') *converge simplement sur* $\mathbb{R}$.
3. *Montrer que* (f_n') *ne converge pas uniformément sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 11 :

Soit la suite $(u_n)_{\mathbb{N}^*}$ *de fonctions définies sur* $\mathbb{R}$ *par* $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+x^2}}$.

1. *Montrer que la série* $\sum u_n(x)$ *converge simplement sur* $\mathbb{R}$. *On note* s *sa somme.*
2. *Montrer que la série* $\sum u_n$ *converge normalement sur* $]-\infty,-a[\cup]a,+\infty[$ *pour tout* $a>0$. *En déduire que* s *est continue sur* $\mathbb{R}^*$.
3. *Montrer que la série* $\sum u_n$ *ne converge pas normalement sur* $\mathbb{R}^*$.
4. *Montrer que la série* $\sum u_n$ *converge uniformément sur* $\mathbb{R}$. *En déduire que* s *est continue sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 12 : Théorème de la double limite FINIE, cas discret :

Soient $(a_{n,p}) \in E^{\mathbb{N}^2}$ *et* $(\varepsilon_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *telles que*
(1) : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_{n,p} \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} \ell_n$;
(2) : $\forall\, p \in \mathbb{N},\ a_{n,p} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_p$;
(3) : $\forall\,(n,p) \in \mathbb{N}^2,\ \|a_{n,p}-\lambda_p\| \leqslant \varepsilon_n$ *avec* $\varepsilon_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
Alors $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(\lambda_p)_{p\in\mathbb{N}}$ *convergent et ont même limite :* $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\lim_{p\to\infty} a_{n,p}) = \lim_{p\to\infty}(\lim_{n\to\infty} a_{n,p})$.

Exercice 13 : Application : lemme de Lebesgue et calcul de $\zeta(2)$:

Soit $f : [a,b] \to E$ *continue.*

1. *Lorsque* f *est* $\mathcal{C}^1$, *à l'aide d'une intégration par parties, montrer que* $\displaystyle\int_a^b f(t)\sin(pt)\,\mathrm{d}t \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. *Soit* f *continue, et* (P_n) *une suite de fonctions polynomiales telle que* $\|P_n - f\|_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

   Posons $a_{n,p} = \displaystyle\int_a^b P_n(t)\sin(pt)\,\mathrm{d}t$ *et* $\varepsilon_n = (b-a)\|P_n - f\|_\infty$.

   Montrer que $\displaystyle\int_a^b f(t)\sin(pt)\,\mathrm{d}t \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *en utilisant le théorème d'interversion des limites.*
3. *Justifier que* $\dfrac{\sin(pt)}{\sin t} = 2\left(\cos((p-1)t)+\cos((p-3)t)+\dots\right)$ *puis en intégrant deux fois par parties, montrer que* $\displaystyle\sum_{k \text{ impair } \leqslant n} \frac{1}{k^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi^2}{8}$, *et finalement* $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$.
4. *Avec la même fonction* f *et* $p=2n$ *vérifier qu'on obtient alors :* $\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{4}$.

V — Exercices travaux dirigés - Intégrales à paramètre

Exercice 14 :

On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+tx}\,\mathrm{d}t$

1. *Montrer que* $F(x)$ *est bien définie pour tout* $x \geqslant 0$.
2. *Montrer que* F *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $[0\,;+\infty[$.
3. *Calculer* $F^{(n)}(0)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 15 :

Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ *Montrer que* F *est solution sur* $\mathbb{R}_+^*$ *de limite nulle en* $+\infty$ *de l'équation différentielle* $y''+y = \dfrac{1}{x}$

Exercice 16 :

Soit $f\colon x \mapsto \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$

1. *Montrer que f est définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.*

2. *Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 2 dont f est solution.*

3. *Pour les 5/2 : Montrer que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.*

4. *Exploiter l'équation différentielle précédente pour former ce développement.*

Exercice 17 :

On considère la fonction $g\colon x \in \left]-1\,;+\infty\right[\mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x\,\mathrm{d}t$

1. *Montrer que la fonction g est bien définie.*

2. *Justifier que la fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ et exprimer $g'(x)$.*

3. *En déduire une expression de $g(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.*

Exercice 18 :

Soit $F\colon x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$

1. *Justifier que F est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.*

2. *Calculer $F'(x)$.*

3. *En déduire une expression simplifiée de $F(x)$.*

Exercice 19 :

On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}}{t}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$

1. *Quel est le domaine de définition réel I de la fonction F ?*

2. *Justifier que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.*

3. *Exprimer $F(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.*

Exercice 20 :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$, on pose $I_n(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(x^2+t^2)^n}$

1. *Justifier l'existence de $I_n(x)$.*

2. *Calculer $I_1(x)$.*

3. *Justifier que $I_n(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et exprimer $I_n'(x)$.*

4. *Exprimer $I_n(x)$.*

Exercice 21 :

1. *Démontrer que la fonction Γ donnée par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $\left]0\,;+\infty\right[$.*

2. *Démontrer que la fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\left]0\,;+\infty\right[$.*

3. *En exploitant l'inégalité de Cauchy Schwarz, établir que la fonction $x \mapsto \ln\Gamma(x)$ est convexe.*

Exercice 22 :

1. *Donner le domaine de définition de la fonction $\Gamma\colon x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$*

2. *Calculer l'intégrale $I_n(x) = \displaystyle\int_0^{n} t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\mathrm{d}t$*

3. *Expliquer rapidement pourquoi $\left(1-\frac{t}{n}\right)^n$ converge vers e^{-t} et montrer que $\Gamma(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$*

Exercice 23 :

Établir que pour tout $x > 0$ $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$

Exercice 24 :

L'objectif de ce sujet est de calculer $I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ *Pour* $x \geqslant 0$*, on pose* $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t)}\,\mathrm{d}t$

1. *Justifier que la fonction* F *est bien définie*
2. *Déterminer une équation linéaire d'ordre 1 dont* F *est solution sur* $]0\,;+\infty[$.
3. *Calculer* $F(0)$ *et la limite de* F *en* $+\infty$.
4. *En déduire la valeur de* I.

Exercice 25 :

On pose, pour $x \geqslant 0$, $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$

1. *Montrer que* F *est continue sur* $[0\,;+\infty[$ *et tend vers 0 en* $+\infty$.
2. *Montrer que* F *est deux fois dérivable sur* $]0\,;+\infty[$ *et calculer* $F''(x)$.
3. *En déduire la valeur de* $F(0)$ *puis la valeur de l'intégrale convergente* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$

VI — Exercices banque CCP

Exercice 26 : CCP Analyse 17

Soit $A \subset \mathbb{C}$ *et* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions de* A *dans* $\mathbb{C}$.

1. *Démontrer l'implication :*

$$\Big(\textit{la série de fonctions } \sum f_n \textit{ converge uniformément sur } A\Big)$$
$$\Downarrow$$
$$\Big(\textit{la suite de fonctions } (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ converge uniformément vers 0 sur } A\Big)$$

2. *On pose :* $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, x \in [0, +\infty[$, $f_n(x) = nx^2\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.
   Prouver que $\sum f_n$ *converge simplement sur* $[0, +\infty[$.
   $\sum f_n$ *converge-t-elle uniformément sur* $[0, +\infty[$ *? Justifier.*

Exercice 27 : CCP Analyse 8

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite décroissante positive de limite nulle.*

1. **a.** *Démontrer que la série* $\sum (-1)^k\, u_k$ *est convergente.*

   Indication *: on pourra considérer* $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ *avec* $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, u_k$.

   b. *Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série* $\sum (-1)^k\, u_k$.

2. **a.** *Étudier la convergence simple sur* $\mathbb{R}$ *de la série de fonctions* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n\, e^{-nx}}{n}$.

   b. *Étudier la convergence uniforme sur* $[0, +\infty[$ *de la série de fonctions* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n\, e^{-nx}}{n}$.

Exercice 28 : CCP Analyse 9

1. *Soit* (f_n) *une suite de fonctions de* $[a,b]$ *dans* $\mathbb{R}$.
On suppose que la suite de fonctions (f_n) *converge uniformément sur* $[a,b]$ *vers une fonction* f, *et que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, f_n *est continue en* x_0, *avec* $x_0 \in [a,b]$.
Démontrer que f *est continue en* x_0.

2. *On pose :* $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in [0,1]$, $g_n(x) = x^n$.
La suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge-t-elle uniformément sur* $[0,1]$ *?*

Exercice 29 : CCP Analyse 11

1. *Soit* X *un ensemble,* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions de* X *dans* $\mathbb{C}$ *et* g *une fonction de* X *dans* $\mathbb{C}$.
Donner la définition de la convergence uniforme sur X *de la suite de fonctions* (g_n) *vers la fonction* g.

2. *On pose* $f_n(x) = \dfrac{n+2}{n+1}\mathrm{e}^{-nx^2}\cos(\sqrt{n}x)$.

- ***a.*** *Étudier la convergence simple de la suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- ***b.*** *La suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge-t-elle uniformément sur* $[0,+\infty[$ *?*
- ***c.*** *Soit* $a > 0$. *La suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge-t-elle uniformément sur* $[a,+\infty[$ *?*
- ***d.*** *La suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge-t-elle uniformément sur* $]0,+\infty[$ *?*

Exercice 30 : CCP Analyse 13

1. *Soit* (g_n) *une suite de fonctions de* X *dans* $\mathbb{C}$, X *désignant un ensemble non vide quelconque.*
On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n *est bornée et que la suite* (g_n) *converge uniformément sur* X *vers* g.
Démontrer que la fonction g *est bornée.*

2. *Pour tout entier naturel* n *non nul, on considère la fonction* f_n *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$f_n(x) = \begin{cases} n^3x & \textit{si} \quad |x| \leqslant \frac{1}{n} \\ \dfrac{1}{x} & \textit{si} \quad |x| > \frac{1}{n} \end{cases}$$

Prouver que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge simplement sur* $\mathbb{R}$.
La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$ *?*

Exercice 31 : CCP Analyse 12

On pose $f_n(x) = \left(x^2+1\right)\dfrac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}$.

1. *Démontrer que la suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur* $[0,1]$.

2. *Calculer* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \left(x^2+1\right)\frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}\,dx$.

Exercice 32 : CCP Analyse 14

1. *Soit* X *une partie de* $\mathbb{R}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions de* X *dans* $\mathbb{R}$ *convergeant simplement vers une fonction* f.
On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* X *telle que la suite* $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *ne tende pas vers* 0.

Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne converge pas uniformément vers* f *sur* X.

2. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *on pose* $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$.

- ***a.*** *Étudier la convergence simple de la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- ***b.*** *Étudier la convergence uniforme de la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sur* $[a,+\infty[$ *(avec* $a > 0$*), puis sur* $]0,+\infty[$.

Exercice 33 : CCP Analyse 10

1. *Soit a et b deux réels donnés avec $a < b$.*
   Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur $[a,b]$, à valeurs réelles.
   Démontrer que si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers f, alors la suite $\left(\displaystyle\int_a^b f_n(x)\,dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.
2. *Justifier comment ce résultat peut être utilisé dans le cas des séries de fonctions.*
3. *Démontrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$.*

Exercice 34 : CCP Analyse 16

On considère la série de fonctions de terme général u_n définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\quad u_n(x) = \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\ .$$

On pose, lorsque la série converge, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\ \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right]$.

1. *Démontrer que S est dérivable sur $[0,1]$.*
2. *Calculer $S'(1)$.*

Exercice 35 : CCP Analyse 27

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+n^2x^2}$ et $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$.

1. *Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $[0,1]$.*
2. *Soit $a \in]0,1[$. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[a,1]$?*
3. *La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?*
4. *Trouver la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.*

Exercice 36 : CCP Analyse 25

1. *Démontrer que, pour tout entier n, la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2+t^ne^{-t}}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.*
2. *On pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2+t^ne^{-t}}$. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.*

Exercice 37 : CCP Analyse 26

Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,dt$.

1. *Justifier que I_n est bien définie.*
2. *Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et déterminer sa limite.*
3. *La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n I_n$ est-elle convergente ?*