Intégrales généralisées

Une intégrale généralisée (ou intégrale impropre) désigne une extension de l'intégrale usuelle, définie par un *passage à la limite* dans d'une des bornes de l'intégrale.

En pratique, on souhaite par exemple donner un sens à $\displaystyle\int_0^{\to+\infty} \exp(-t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{\to 0}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$.

I — Convergence d'une intégrale généralisée.

Définition : intégrales généralisées *(1)*

E désigne un espace vectoriel normé de dimension finie.

(1) : *Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \,]a,+\infty]$ et $f : [a,b[\to E$ continue par morceaux. L'intégrale $\displaystyle\int_{[a,b[} f$ est dite généralisée en b^-. Elle converge si l'intégrale partielle $x \mapsto \displaystyle\int_{[a,x]} f$ admet une limite finie lorsque $x \to b^-$.*

Dans ce cas, on pose $\displaystyle\int_{[a,b[} f = \lim_{x\to b^-} (\int_{[a,x]} f)$.

(2) : *Soient $b \in \mathbb{R}$, $a \in [-\infty, b[$ et $f :]a,b] \to E$ continue par morceaux. L'intégrale $\displaystyle\int_{]a,b]} f$ est dite généralisée en a^+. Elle converge si l'intégrale partielle $x \mapsto \displaystyle\int_{[x,b]} f$ admet une limite finie lorsque $x \to a^+$.*

Dans ce cas, on pose $\displaystyle\int_{]a,b]} f = \lim_{x\to a^+} (\int_{[x,b]} f)$.

(3) : *Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \,]a,+\infty]$ et $f :]a,b[\to E$ continue par morceaux. L'intégrale $\displaystyle\int_{]a,b[} f$ est dite généralisée en a^+ et en b^-. Elle converge s'il existe $c \in \,]a,b[$ tel que les intégrales généralisées $\displaystyle\int_{]a,c]} f$ et $\displaystyle\int_{[c,b[} f$ sont convergentes.*

Dans ce cas, on pose $\displaystyle\int_{]a,b[} f = \int_{]a,c]} f + \int_{[c,b[} f$. Cette définition est indépendante du point c choisi.

Remarque / Notation *(2)*

Par définition, une intégrale impropre est une limite. Pour la manipuler, il faut d'abord en justifier l'existence. Pour ne pas oublier cette étape indispensable, on propose d'indiquer le signe $\to a^+$ ou $\to b^-$ à l'une des bornes de l'intégrale.

Remarques *(3)*

(1) : *les intégrales généralisées en un point intérieur sont normalement hors programme, mais on justifiera que f est continue par morceaux sur (a,b).*

(2) : *Lorsque f est à valeurs réelles positives et qu'une intégrale généralisée de f est divergente, on convient que sa valeur est $+\infty$.*

Exemples : *(4)*

$$\int_1^{\to+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha},\ \int_{\to 0}^{1}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha},\ \int_0^{\to+\infty}e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t,\ \int_{\to 0}^{1}\ln(t)\,\mathrm{d}t,\ \int_{\to-\infty}^{\to+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2},\ \int_{\to-\infty}^{\to+\infty}\frac{t}{1+t^2}\mathrm{d}t,\ \int_{\to-1}^{\to 1}\frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}.$$

Reste d'une intégrale convergente *(5)*

(1) : *Si f est $C^0_{PM}([a,b[,E)$ et $\int_a^{\to b} f$ est convergente, alors $\forall c\in[a,b[$, $\int_c^{\to b} f$ est convergente.*

(2) : *On peut alors poser $R(x)=\int_x^{\to b} f$ pour $x\in[a,b[$ et ce reste d'intégrale convergente vérifie $\lim_{x\to b}R(x)=0$.*

Intégrales faussement impropres : *(6)*

(1) : *Si f est continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ alors $\int_{]a,b]} f$, $\int_{[a,b[} f$ et $\int_{]a,b[} f$ sont convergentes et ont pour valeur $\int_{[a,b]} f$.*

(2) : *Si a est fini, f est continue sur $]a,b]$ et admet une limite finie en a^+ alors $\int_{]a,b]} f$ est convergente (réciproque fausse).*

Seule limite éventuelle possible pour l'intégrande : *(7)*

(1) : *Si $f(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}\ell$ et $\int_{[a,+\infty[} f$ converge, alors $\ell=0$.*

(2) : ***Attention :*** *Il se peut que $\int_{[a,+\infty[} f$ converge sans que f ait une limite en $+\infty$.*

Linéarité *(8)*

(1) : *si f et g sont continues par morceaux sur I et $\lambda\in\mathbb{K}$, si les intégrales $\int_I f$ et $\int_I g$ sont convergentes, alors $\int_I(f+\lambda g)$ est convergente et*

$$\int_I(f+\lambda g)=\int_I f+\lambda\int_I g.$$

(2) : *L'ensemble des fonctions dont l'intégrale converge est donc un sous-espace vectoriel de $C^0_{PM}(I,E)$ et la fonction somme est une forme linéaire.*

Attention *(9)*

Comme pour les séries, avant d'écrire $\int_I(f+g)=\int_I f+\int_I g$, on justifiera l'existence d'au moins deux des trois intégrales généralisées.

Calcul coordonnée par coordonnée *(10)*

(1) : *Lorsque E est un espace de dimension finie muni d'une base β, l'intégrale peut se calculer coordonnée par coordonnée.*

(2) : *En particulier, si $f:I\to\mathbb{C}$, $\int_I f$ existe $\Leftrightarrow$ $\int_I Re(f)$ et $\int_I Im(f)$ existent et alors $\int_I f=\int_I Re(f)+i\int_I Im(f)$.*

Exercice 1 : Calcul

Natures et calculs de $\int_{[0,+\infty[}\cos(t)\exp(-t)dt$ et $\int_{[0,+\infty[}\sin(t)\exp(-t)dt$.

Propriétés *(11)*

(1) : *Lorsque* $E=\mathbb{R}$ *: si* $\forall x \in I, f(x) \geqslant 0$*, alors* $\int_I f \geqslant 0$ *(positivité).*

(2) : *Lorsque* $E=\mathbb{R}$ *: si* $\forall x \in I, f(x) \leqslant g(x)$*, alors* $\int_I f \leqslant \int_I g$ *(croissance).*

(3) : *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *est* **continue**, *positive et intégrable sur* I*. Si* $\int_I f = 0$*, alors* $f=0$*.*

Théorème fondamental de l'analyse *(12)*

(1) : *Si* f *est continue sur* I*, la fonction* $F : x \mapsto \int_x^{\to+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ *est dérivable sur* I *et* $F'(x) = -f(x)$*.*

Usage d'une primitive, crochet généralisé *(13)*

Pour justifier l'existence tout en calculant $\int_a^{\to b} f$*, on peut :*

(1) : *calculer l'intégrale partielle* $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ *puis faire tendre* x *vers* b^-*.*

(2) : *ou bien utiliser une primitive* F *de* f *et exploiter sous réserve d'existence* $\int_a^{\to b} f = [F]_a^{b^-}$*.*

Exemple : *(14)*

Le calcul direct par primitive est parfois plus rapide, mais peut présenter plus de risques :

Pour le calcul de $\int_1^{\to+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)}$ *:*

(1) : *en utilisant les intégrales partielles, on peut séparer les intégrales et écrire* $\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)} = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} - \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t+1}$*.*
En passant à la limite, on trouve $\ln 2$*.*

(2) : *en utilisant les primitives, on est obligé d'écrire* $\int_1^{\to+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)} = \int_1^{\to+\infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t-1}\right)\mathrm{d}t = \left[\ln \frac{t}{t+1}\right]_1^{+\infty} = \ln 2$*.*
Il serait lourdement sanctionné de séparer l'intégrale convergente en somme de deux intégrales divergentes !

Techniques de calcul intégral : *(15)*

(1) : **Intégration par parties :** *l'existence de limites finies du produit* fg *aux bornes de l'intervalle assure que les intégrales de* fg' *et* $f'g$ *sont de même nature et alors* $\int_a^b fg' = [fg]_a^b - \int_a^b f'g$

Exemple : $\int_0^{\to+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t = n!$.

(2) : **Changement de variable $\mathcal{C}^1$ *bijectif* :** *si* ϕ *est croissante bijective de* $]\alpha,\beta[$ *dans* $]a,b[$ *de classe* C^1*, les intégrales* $\int_a^b f(t)dt = \int_\alpha^\beta f(\phi(u))\phi'(u)du$ *sont de même nature et égales en cas de convergence.*

Exemple : $\int_1^{\to+\infty} \frac{dx}{x\cdot\sqrt{1+x^2}} = \ln(\sqrt{2}+1)$ *en posant* $u=\sqrt{1+x^2}$*.*

Exercice 2 : IPP généralisée ?

On souhaite calculer $\displaystyle\int_{\to 0}^{1} \frac{\ln t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$.

(1) : *Peut-on procéder à une IPP généralisée en posant* $u'(t) = \dfrac{1}{(1+t)^2}$ *et* $v(t) = \ln t$ *?*

(2) : *1ère méthode : passer par une IPP dans les intégrales partielles.*

(3) : *2ème méthode : poser* $u(t) = \dfrac{t}{1+t}$ *et faire une IPP généralisée.*

Exercice 3 : Changement de variables généralisé

Calculer $\displaystyle\int_{\to 0}^{\to +\infty} \frac{\exp(-\sqrt{t})}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$

II — Intégrabilité sur un intervalle (souvent non compact).

Dans la suite, l'intervalle I n'a pas obligation d'être compact. Il peut être ouvert, semi-ouvert ou non borné.

Théorème de convergence absolue : *(16)*

(1) : *Si* $\displaystyle\int_I \|f\|$ *est convergente alors* $\displaystyle\int_I f$ *l'est et on a* $\displaystyle\|\int_I f\| \leqslant \int_I \|f\|$ *(inégalité triangulaire).*

(2) : ***Définition :*** *lorsque c'est le cas, on dit que* f *est* **intégrable sur** I.
On dit indifféremment que "f *est intégrable" ou bien que "l'intégrale* $\int_I f$ *converge absolument".*

(3) : **Notation :** *on note* $L^1(I,E)$ *l'espace vectoriel des fonctions intégrables sur* I *à valeurs dans* E.

Attention *(17)*

Le produit de deux fonctions intégrables sur I *n'a aucune raison d'être intégrable sur* I. *Contre exemple :* $f : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ *est intégrable sur* $]0,1]$, *mais* f^2 *ne l'est pas.*

Exercice 4 :

Justifier que $|fg| \leqslant \dfrac{1}{2}\left(|f|^2 + |g|^2\right)$. *En déduire que si* f^2 *et* g^2 *sont intégrables, alors* fg *l'est aussi.*

Théorèmes de comparaison à une autre intégrale *(18)*

Principe général : *l'intégrale d'une fonction réelle positive converge si et seulement si les intégrales partielles sont majorées. Dans ce cas, la valeur de l'intégrale est la borne supérieure des intégrales partielles.*

(1) : *Si* $0 \leqslant f \leqslant g$ *alors* $\displaystyle 0 \leqslant \int_I f \leqslant \int_I g$ *(inégalité dans* $[0,+\infty]$*).*

(2) : *Si* f *est une fonction vectorielle et* g *une fonction réelle positive telle que* $\displaystyle\int_I g$ *est convergente et* $f(x) = O(g(x))$ *au voisinage de la borne de généralisation alors* $\displaystyle\int_I \|f\|$ *converge.*

(3) : *Si* f *et* g *sont réelles* **positives** *et* $f(x) \sim g(x)$ *au voisinage de la borne de généralisation alors* $\displaystyle\int_I f$ *et* $\displaystyle\int_I g$ *ont même nature (usage systématiquement refusé s'il n'y a pas la vérification du signe).*

Applications : critères de Riemann à distance finie ou infinie *(19)*

(1) : ***Distance finie :*** *si* a *est fini et* $f(t) \sim \frac{\lambda}{(t-a)^\alpha}$ *avec* $\lambda \neq 0$ *alors* $\int_{]a,b]} f$ *converge* $\Longleftrightarrow \alpha < 1$.

(2) : ***Distance finie :*** *si* b *est fini et* $f(t) \sim \frac{\lambda}{(b-t)^\alpha}$ *avec* $\lambda \neq 0$ *alors* $\int_{[a,b[} f$ *converge* $\Longleftrightarrow \alpha < 1$.

(3) : ***Distance infinie :*** *si* $f(t) \sim \frac{\lambda}{t^\alpha}$ *avec* $\lambda \neq 0$ *alors* $\int_{[a,+\infty[} f$ *converge* $\Longleftrightarrow \alpha > 1$.

Application : fonction Gamma d'Euler : *(20)*

(1) : $\int_{\to 0}^{\to +\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ *converge* $\Longleftrightarrow \alpha > 0$ *(fonction* Γ *d'*Euler, $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$*).*

Exercice 5 : Convergence

Montrer que $\int_{\to 0}^{\to +\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ *converge (on pourra faire une IPP)*

Exercice 6 : Intégrabilités

(1) : *Nature des intégrales* $\int_{\to 0}^{\to +\infty} \frac{t}{\exp(t) - 1}\,\mathrm{d}t$, $\int_{\to 0}^{1} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$, $\int_{\to 0}^{1} \ln t\,\mathrm{d}t$, $\int_{\to 0}^{1} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$.

(2) : *Parfois, il est préférable de faire une translation sur la variable pour déterminer un équivalent. Nature des intégrales* $\int_0^{\to 1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^3}}$, $\int_{\to 1}^{\to +\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2 - 1}$.

Théorème d'intégration des relations de comparaison *(21)*

Soient $f : [a,b[\to E$ *et* $g : [a,b[\to \mathbb{R}^+$ *continues par morceaux.*
On suppose $f(x) = O(g(x))$ *(resp.* $f(x) = o(g(x))$, $f(x) \sim g(x)$*) pour* $x \to b^-$.

(1) : **Cas convergent :** *si* $\int_{[a,b[} g$ *converge alors* $\int_{[a,b[} f$ *converge aussi et* $\int_{[x,b[} f = O(\int_{[x,b[} g)$ *(resp.* o, $\sim$*).*

(2) : **Cas divergent :** *si* $\int_{[a,b[} g$ *diverge alors* $\int_{[a,x]} f = O(\int_{[a,x]} g)$ *(resp.* o, $\sim$*).*

Exemple : *(22)*

$$\int_1^{\to +\infty} \frac{e^{(1-t)x}}{t}\,\mathrm{d}t = e^x \int_x^{\to +\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = (2\ \text{IPP}) = \tfrac{1}{x} - \tfrac{1}{x^2} + O(\tfrac{1}{x^3}).$$

Exercice 7 : Transformation d'une intégrale en série par découpage

Soit $f : [a,b[\to E$ *et* (a_n) *une suite strictement croissante telle que* $a_0 = a$ *et* $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} b^-$.

(1) : *Montrer que si* $\int_{[a,b[} f$ *converge alors la série* $\sum \int_{[a_n,a_{n+1}]} f$ *converge aussi et* $\int_{[a,b[} f = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{[a_k,a_{k+1}]} f$.

(2) : *Montrer que si* f *est à valeurs réelles positives alors* $\int_{[a,b[} f = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{[a_k,a_{k+1}]} f$ *(égalité dans* $[0,+\infty]$*).*

(3) : $\int_0^{\to +\infty} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t$ *diverge.*

III — Travaux dirigés

Exercice 8 : Étude de la nature d'une intégrale

Étudier la nature des intégrales suivantes :

$$\int_0^{\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)dx \qquad \int_1^{\to+\infty}\left(e-\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)dx \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{|x|}}dx$$

$$\int_{\to0}^{\to+\infty}\frac{\sin(2x)-\ln(1+x)}{x^{5/3}}dx \qquad \int_{\to0}^{\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2+1}dx \qquad \int_2^{+\infty}\frac{1}{x^a(\ln x)^b}dx\ (a,b)\in\mathbb{R}^2$$

$$\int_{\to-1}^{\to1}\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}dx \qquad \int_{\to0}^{\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2-1}dx \qquad \int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^a}dx\ (a>0)$$

(attention au voisinage de 1)

Exercice 9 : Intégrales de Fresnel

(1) : *Montrer que l'intégrale* $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{ix^2}dx$ *est convergente à l'aide d'un changement de variables puis d'une IPP. Est-elle absolument convergente ?*

(2) : *En déduire que les intégrales* $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin(x^2)dx$ *et* $\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos(x^2)dx$ *sont convergentes.*

Exercice 10 : Intégrales de Wallis

(1) : *Calculer* $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x^2+1)^n}dx$ *en trouvant une relation de récurrence entre* I_n *et* I_{n+1}*.*

(2) : *En posant* $t=\tan x$*, montrer que* $\displaystyle I_n=\int_0^{\pi/2}(\cos^2(x))^{n-1}dx$

Exercice 11 : $\zeta(2)$

(1) : *Montrer que* $f : t\mapsto \dfrac{\ln t}{t-1}$ *est intégrable sur* $]0,1[$*.*

(2) : *Justifier que* $\displaystyle\frac{\ln t}{t-1}=-\sum_{k=0}^{n}t^k\ln t+\frac{t^{n+1}\ln t}{t-1}$.

(3) : *Montrer que* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{t^{n+1}\ln t}{t-1}dt=0$.

(4) : *En déduire la convergence de la série de terme général* $\displaystyle -\int_0^1 t^k\ln t dt$ *puis en faisant une intégration par parties de* $\displaystyle -\int_\varepsilon^1 t^k\ln t dt$*, montrer que* $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln t}{t-1}dt=\zeta(2)$.

Exercice 12 : $\ln 2$

(1) : *En écrivant pour* $x\in]0,1[$ *que* $\displaystyle\int_0^x\frac{t-1}{\ln t}dt=\int_0^x\frac{t}{\ln t}dt-\int_0^x\frac{1}{\ln t}dt$*, montrer que* $\displaystyle\int_0^x\frac{t-1}{\ln t}dt=\int_x^{x^2}\frac{1}{\ln t}dt$.

(2) : *Pour* $x\in]0,1[$ *et* $t\in[x^2,x]$*, justifier que* $\dfrac{x}{t\ln t}\leqslant\dfrac{1}{\ln t}\leqslant\dfrac{x^2}{t\ln t}$.

(3) : *Montrer alors que* $\displaystyle\int_0^1\frac{t-1}{\ln t}dt=\ln 2$

Exercice 13 : Comparaison à $1/x$

Soit f *définie, continue, positive, décroissante sur* $[1,+\infty[$ *et intégrable sur* $[1,+\infty[$*.*
Montrer que $xf(x)$ *tend vers 0 lorsque* x *tend vers* $+\infty$*.*

Passage à la limite sous l'intégrale

On souhaite établir des conditions suffisantes permettant d'écrire :

$$\int_I \lim_n f_n = \lim_n \int_I f_n \text{ ou bien } \int_I \sum_n f_n = \sum_n \int_I f_n$$

Nous discuterons de plusieurs cas selon que :

- ▷ l'intégrale se fait sur un segment ou sur un intervalle non compact,
- ▷ on a affaire à une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou bien une série de fonctions $\sum f_n$,
- ▷ les différents modes de convergence de la suite/série de fonctions (convergence simple ou convergence uniforme).

Un exemple qui marche :

- ▷ pour $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$. Alors $\displaystyle\int_{[0,1]} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \int_{[0,1]} \frac{t^k}{k!}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e-1 = \int_{[0,1]} \exp(t)\,\mathrm{d}t$

Deux exemples qui ne marchent pas :

- ▷ pour $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$. Alors $\displaystyle\left(\int_{]-\infty,0]} f_n(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite tandis que $\displaystyle\int_{]-\infty,0]} \exp(t)\,\mathrm{d}t = 1$...
- ▷ Deux phénomènes de bosses glissantes :
  À distance infinie $f_n(x) = \dfrac{1}{n} \cdot \mathbb{1}_{[n,2n]}(x)$ et à distance finie $g_n(x) = n \cdot \mathbb{1}_{[1/n,2/n]}(x)$.

I — Définitions et exemples

Définitions des différents modes de convergence d'une suite de fonctions : *(1)*

Soient $D \subset \mathbb{R}$ non vide, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de D dans $\mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$.
On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la fonction f ...
(1) : SIMPLEMENT *si $\forall x \in D$, $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$;*
(2) : UNIFORMÉMENT *si à partir d'un certain rang, chaque $f_n - f$ est bornée sur D et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.*

Exemples élémentaires : *(2)*

La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{x}{n}$ converge simplement vers la fonction nulle, mais la convergence n'est pas uniforme.
La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $f_n : x \in [0,+\infty[\mapsto \dfrac{x^n}{1+x^n}$ converge simplement vers la fonction
$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ 1/2 & \text{si } x = 1 \\ 1 & \text{si } x \in]1,+\infty[\end{cases}$ *, mais la convergence n'est pas uniforme.*
En particulier, une limite simple de fonctions continues peut ne pas être continue.
De même, une limite simple de fonctions continues par morceaux peut ne pas être continue par morceaux.
Si on fixe x et $\varepsilon > 0$, il existe un rang **dépendant de** *x* **et de** *ε tel que $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$. On peut écrire "$\forall x \in [0,+\infty[, \forall \varepsilon > 0, \exists N_{x,\varepsilon} \in \mathbb{N} : \ldots$". Ce choix de N n'est donc pas uniforme en x !*

Définitions : *(3)*

Soient $D \subset \mathbb{R}$ *non vide,* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions de* D *dans* $\mathbb{R}$ *et* $f : D \to \mathbb{R}$.
On dit que la série $\sum f_n$ *converge vers la fonction* f *...*

(1) : SIMPLEMENT *si* $\forall\, x \in D$, $\sum_n f_n(x) = f(x)$ *;*

(2) : UNIFORMÉMENT *si la suite de fonctions* $(\sum_{k=0}^{n} f_k)$ *converge uniformément vers* f *;*

(3) : NORMALEMENT *s'il y a convergence simple et s'il existe une suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *réelle positive telle que :*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \|f_n(x)\|_\infty \leqslant a_n \text{ et } \sum_n a_n < +\infty$$

Exemple élémentaire : *(4)*

Posons $f_n(x) = \exp(-x) \cdot \dfrac{x^k}{k!}$. *La série de fonctions* $\sum f_n$ *converge simplement sur* $\mathbb{R}_+$ *vers la fonction constante égale à 1. Cette convergence n'est pas uniforme, ni normale.*

Exercice 1 : Convergence uniforme implique convergence simple

(1) : *Montrer que si* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* f *uniformément sur* D*, alors* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement vers* f.

(2) : *Montrer que si* $\sum f_n$ *converge vers* f *uniformément sur* D*, alors* $\sum f_n$ *converge simplement vers* f.

(3) : *Montrer que si* $\sum f_n$ *converge normalement vers* f*, alors* $\sum f_n$ *converge uniformément vers* f.

Exemples à connaître : *(5)*

Soit $f_n(x) = x^n$, $g_n(x) = \dfrac{x^n}{n}$.

(1) : *La* suite *de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *:*

converge simplement sur $]-1, 1]$

converge uniformément sur tout segment $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$ *où* $0 \leqslant \varepsilon < 1$.

ne converge pas uniformément sur $]-1, 1]$

(2) : *La* série *de fonctions* $\sum f_n$ *:*

converge simplement sur $]-1, 1[$

converge normalement donc uniformément sur tout segment $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$ *où* $0 \leqslant \varepsilon < 1$.

ne converge pas uniformément sur $]-1, 1[$

(3) : *La* suite *de fonctions* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *:*

converge uniformément donc simplement sur $[-1, 1]$

(4) : *La* série *de fonctions* $\sum g_n$ *:*

converge simplement sur $[-1, 1[$

converge uniformément sur tout segment $[-1, 1-\varepsilon]$ *où* $0 \leqslant \varepsilon < 1$.

ne converge pas uniformément sur $[-1, 1[$

converge normalement sur tout segment $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$ *où* $0 \leqslant \varepsilon < 1$.

ne converge pas normalement sur $]-1, 1[$ *(en pratique, lorsque la convergence est uniforme mais non normale, on est souvent dans le cas d'une série alternée : on majore alors la valeur absolue du reste par* $||g_{n+1}||_\infty$*).*

II — Intégration terme à terme

Intégration terme à terme de convergence uniforme *(6)*

(1) : *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions continues du* **segment** $[a,b]$ *dans* $\mathbb{R}$ *et* $f : I \to \mathbb{R}$ *telle que* $\lim\limits_{n\to+\infty} ||f_n - f||_\infty = 0$ *(convergence uniforme sur le segment* $[a,b]$*). Alors :*

$$\int_{[a,b]} f = \lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} f_n.$$

(2) : *Soit* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions continues du* **segment** $[a,b]$ *dans* $\mathbb{R}$ *et* $g : I \to \mathbb{R}$ *telle que* $\lim\limits_{n\to+\infty} ||\sum\limits_{k=0}^{n} g_k - g||_\infty = 0$ *(convergence uniforme de la série* $\sum g_n$ *sur le segment* $[a,b]$*). Alors :*

$$\int_{[a,b]} g = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{[a,b]} g_k.$$

Lemme de Beppo Levi *(7)*

Intégration terme à terme fonctions positives continues par morceaux sur un intervalle :
Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions de* I *dans* $\mathbb{R}$ *continues par morceaux positives et* $g : I \to \mathbb{R}$ *continue par morceaux positive telle que* $\forall\, x \in I,\ g(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} g_k(x)$ *(convergence simple). Alors :*

$$\int_I g = \sum_{k=0}^{\infty} \int_I g_k$$

(égalité dans $[0,+\infty]$*).*

Admis

Théorème d'intégration terme à terme de Beppo Levi **(cas vectoriel) :** *(8)*

Soit (g_n) *une suite de fonctions de* I *dans* E *continues par morceaux et* $g : I \to E$ *continue par morceaux telle que pour tout* $x \in I$ *:* $g(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} g_k(x)$ *(convergence simple).*
Si l'une des conditions suivantes est réalisée : $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \int_I \|g_k\| < +\infty$ *ou* $\int_I \sum\limits_{k=0}^{\infty} \|g_k\| < +\infty$ *alors* g *est intégrable sur* I *et on a :* $\int_I \|g\| \leqslant \sum\limits_{k=0}^{\infty} \int_I \|g_k\|$ *et*

$$\int_I g = \sum_{k=0}^{\infty} \int_I g_k.$$

Admis

Exemple : *(9)*

(1) : $$\int_{\to 0}^{\to+\infty} -\ln(1-e^{-t})\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\to 0}^{\to+\infty} \frac{e^{-nt}}{n}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2).$$

(2) : $$\int_{\to 0}^{\to+\infty} \ln(1+e^{-t})\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\to 0}^{\to+\infty} (-1)^{n+1}\frac{e^{-nt}}{n}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \eta(2) = \frac{1}{2}\zeta(2).$$

Contre-exemple avec $\sum_{n=0}^{\infty}\int_I \|f_n\| = +\infty$: *(10)*

$f_n(x) = (-1)^n \sin(x) 1_{[n\pi,(n+2)\pi]}(x)$.

III — Convergence dominée

Théorème de convergence dominée : cas réel positif : *(11)*

Soit (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$ continues par morceaux et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ continue par morceaux telles que :
(i) $\forall x \in I,\ f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$;
(ii) $\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant f_n(x) \leqslant \varphi(x)$;
(iii) $\displaystyle\int_I \varphi < +\infty$.
Alors $\displaystyle\int_I f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Admis

Théorème de convergence dominée : cas vectoriel : *(12)*

Soit (f_n) une suite de fonctions de I dans E continues par morceaux, $f : I \to E$ continue par morceaux et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ continue par morceaux telles que :
(i) $\forall x \in I,\ f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$;
(ii) $\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N},\ \|f_n(x)\| \leqslant \varphi(x)$;
(iii) $\displaystyle\int_I \varphi < +\infty$.
Alors les f_n et f sont intégrables et on a $\displaystyle\int_I f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_I f$.

Admis

Exemple et contre exemple : *(13)*

Calcul de $\displaystyle\int_{\to 0}^{\to +\infty} e^{-t}\ln(t)\,\mathrm{d}t$

Soient $f(t) = e^{-t}\ln(t)$ *et* $f_n(t) = (1-\frac{t}{n})^n \ln(t) 1_{[0,n]}(t)$. *On a* $|f_n| \leqslant |f|$, $|f|$ *est intégrable sur* $]0,+\infty[$ *et* $f = \lim f_n$. *Donc* $\displaystyle\int_{]0,+\infty[} f = \lim_{n\to\infty} \int_{t=0}^{n} (1-\frac{t}{n})^n \ln(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} I_n$.

$$\begin{aligned}
I_n &= n\int_{u=0}^{1} (1-u)^n \ln(nu)\,\mathrm{d}u \\
&= \tfrac{n}{n+1}\Big([(1-(1-u)^{n+1})\ln(nu)]_{u=0}^{1} - \int_{u=0}^{1} (1+(1-u)+\cdots+(1-u)^n)\,\mathrm{d}u\Big) \\
&= \tfrac{n}{n+1}(\ln(n) - 1 - \tfrac{1}{2} - \cdots - \tfrac{1}{n+1}) \\
&\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\gamma.
\end{aligned}$$

Contre-exemple sans domination : $f_n = 1_{[n,n+1]}$.

Théorème de convergence dominée : cas d'un paramètre réel : *(14)*

Soient $J \subset \mathbb{R}$, $\lambda_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ adhérent à J, $(f_\lambda)_{\lambda \in J}$ une famille de fonctions de I dans E continues par morceaux, $f : I \to E$ continue par morceaux et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ continue par morceaux telles que :

(i) $\forall\, x \in I,\ f_\lambda(x) \underset{\lambda \to \lambda_0}{\longrightarrow} f(x)$;

(ii) $\forall\, x \in I,\ \forall\, \lambda \in J,\ \|f_\lambda(x)\| \leqslant \varphi(x)$;

(iii) $\displaystyle\int_I \varphi < +\infty$.

Alors les f_λ et f sont intégrables et on a $\displaystyle\int_I f_\lambda \underset{\lambda \to \lambda_0}{\longrightarrow} \int_I f$.

IV — Intégration terme à terme d'une série de fonctions

Exercice 2 : Des classiques

Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

$$\int_0^{1} \frac{\ln t}{1 + t^2} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^2}.$$

$$\int_0^{1} \frac{1}{t^t} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}.$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1}.$$

$$\int_0^{1} t^{x-1} e^{-t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}.$$

V — Convergence dominée

Exercice 3 : Intégration terme à terme

Pour chaque égalité, vérifier que le théorème d'intégration terme à terme ne peut pas s'appliquer et montrer alors l'égalité en utilisant le théorème de convergence dominée.

$$\int_0^{1} \frac{1}{1 + t^2} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

$$\int_0^{1} \frac{t}{1 + t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}.$$

Exercice 4 : Intervertion limite et intégrale

Calculer les limites des suites dont les termes généraux sont les suivants :

$$a_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x dx$$

$$b_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^n + \mathrm{e}^x}$$

$$c_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{1 + x^{n+2}} dx$$

$$d_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{nt + t^2}\, \mathrm{d}t$$