Passage à la limite sous l'intégrale

On souhaite établir des conditions suffisantes permettant d'écrire :

$$\int_I \lim_n f_n = \lim_n \int_I f_n \text{ ou bien } \int_I \sum_n f_n = \sum_n \int_I f_n$$

Nous discuterons de plusieurs cas selon que :

- ▷ l'intégrale se fait sur un segment ou sur un intervalle non compact,
- ▷ on a affaire à une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou bien une série de fonctions $\sum f_n$,
- ▷ les différents modes de convergence de la suite/série de fonctions (convergence simple ou convergence uniforme).

Un exemple qui marche :

- ▷ pour $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$. Alors $\displaystyle\int_{[0,1]} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \int_{[0,1]} \frac{t^k}{k!}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e-1 = \int_{[0,1]} \exp(t)\,\mathrm{d}t$

Deux exemples qui ne marchent pas :

- ▷ pour $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$. Alors $\displaystyle\left(\int_{]-\infty,0]} f_n(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite tandis que $\displaystyle\int_{]-\infty,0]} \exp(t)\,\mathrm{d}t = 1$...
- ▷ Deux phénomènes de bosses glissantes :
  À distance infinie $f_n(x) = \dfrac{1}{n} \cdot \mathbb{1}_{[n,2n]}(x)$ et à distance finie $g_n(x) = n \cdot \mathbb{1}_{[1/n,2/n]}(x)$.

I — Définitions et exemples

Définitions des différents modes de convergence d'une suite de fonctions : *(1)*

Soient $D \subset \mathbb{R}$ non vide, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de D dans $\mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$.
On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la fonction f ...
(1) : SIMPLEMENT *si* $\forall x \in D,\ f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$;
(2) : UNIFORMÉMENT *si à partir d'un certain rang, chaque $f_n - f$ est bornée sur D et* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.

Exemples élémentaires : *(2)*

La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{x}{n}$ converge simplement vers la fonction nulle, mais la convergence n'est pas uniforme.
La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $f_n : x \in [0,+\infty[\mapsto \dfrac{x^n}{1+x^n}$ converge simplement vers la fonction
$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ 1/2 & \text{si } x = 1 \\ 1 & \text{si } x \in]1,+\infty[\end{cases}$ *, mais la convergence n'est pas uniforme.*
En particulier, une limite simple de fonctions continues peut ne pas être continue.
De même, une limite simple de fonctions continues par morceaux peut ne pas être continue par morceaux.
Si on fixe x et $\varepsilon > 0$, il existe un rang **dépendant de** x **et de** ε *tel que $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$. On peut écrire "$\forall x \in [0,+\infty[, \forall \varepsilon > 0, \exists N_{x,\varepsilon} \in \mathbb{N}$: ...". Ce choix de N n'est donc pas uniforme en x !*

Définitions : *(3)*

Soient $D \subset \mathbb{R}$ non vide, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de D dans $\mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$.
On dit que la série $\sum f_n$ converge vers la fonction f ...
(1) : SIMPLEMENT *si $\forall\, x \in D$, $\sum_n f_n(x) = f(x)$;*
(2) : UNIFORMÉMENT *si la suite de fonctions $(\sum_{k=0}^{n} f_k)$ converge uniformément vers f ;*
(3) : NORMALEMENT *s'il y a convergence simple et s'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réelle positive telle que :*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \|f_n(x)\|_\infty \leqslant a_n \text{ et } \sum_n a_n < +\infty$$

Exemple élémentaire : *(4)*

Posons $f_n(x) = \exp(-x) \cdot \dfrac{x^k}{k!}$. La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction constante égale à 1. Cette convergence n'est pas uniforme, ni normale.

Exercice 1 : Convergence uniforme implique convergence simple

(1) : *Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f uniformément sur D, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f.*
(2) : *Montrer que si $\sum f_n$ converge vers f uniformément sur D, alors $\sum f_n$ converge simplement vers f.*
(3) : *Montrer que si $\sum f_n$ converge normalement vers f, alors $\sum f_n$ converge uniformément vers f.*

Exemples à connaître : *(5)*

Soit $f_n(x) = x^n$, $g_n(x) = \dfrac{x^n}{n}$.
(1) : *La* suite *de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$:*

converge simplement sur $]-1,1]$

converge uniformément sur tout segment $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$ *où* $0 \leqslant \varepsilon < 1$.

ne converge pas uniformément sur $]-1,1]$

(2) : *La* série *de fonctions $\sum f_n$:*

converge simplement sur $]-1,1[$

converge normalement donc uniformément sur tout segment $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$ *où* $0 \leqslant \varepsilon < 1$.

ne converge pas uniformément sur $]-1,1[$

(3) : *La* suite *de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$:*

converge uniformément donc simplement sur $[-1,1]$

(4) : *La* série *de fonctions $\sum g_n$:*

converge simplement sur $[-1,1[$

converge uniformément sur tout segment $[-1, 1-\varepsilon]$ *où* $0 \leqslant \varepsilon < 1$.

ne converge pas uniformément sur $[-1,1[$

converge normalement sur tout segment $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$ *où* $0 \leqslant \varepsilon < 1$.

ne converge pas normalement sur $]-1,1[$ *(en pratique, lorsque la convergence est uniforme mais non normale, on est souvent dans le cas d'une série alternée : on majore alors la valeur absolue du reste par $||g_{n+1}||_\infty$).*

II — Intégration terme à terme

Intégration terme à terme de convergence uniforme *(6)*

(1) : *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions continues du* **segment** $[a,b]$ *dans* $\mathbb{R}$ *et* $f : I \to \mathbb{R}$ *telle que* $\lim\limits_{n\to+\infty} ||f_n - f||_\infty = 0$ *(convergence uniforme sur le segment* $[a,b]$*). Alors :*

$$\int_{[a,b]} f = \lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} f_n.$$

(2) : *Soit* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions continues du* **segment** $[a,b]$ *dans* $\mathbb{R}$ *et* $g : I \to \mathbb{R}$ *telle que* $\lim\limits_{n\to+\infty} ||\sum\limits_{k=0}^{n} g_k - g||_\infty = 0$ *(convergence uniforme de la série* $\sum g_n$ *sur le segment* $[a,b]$*). Alors :*

$$\int_{[a,b]} g = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{[a,b]} g_k.$$

Lemme de Beppo Levi *(7)*

Intégration terme à terme fonctions positives continues par morceaux sur un intervalle :
Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions de* I *dans* $\mathbb{R}$ *continues par morceaux positives et* $g : I \to \mathbb{R}$ *continue par morceaux positive telle que* $\forall\, x \in I,\ g(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} g_k(x)$ *(convergence simple). Alors :*

$$\int_I g = \sum_{k=0}^{\infty} \int_I g_k$$

(égalité dans $[0,+\infty]$*).*

Admis

Théorème d'intégration terme à terme de Beppo Levi **(cas vectoriel) :** *(8)*

Soit (g_n) *une suite de fonctions de* I *dans* E *continues par morceaux et* $g : I \to E$ *continue par morceaux telle que pour tout* $x \in I$: $g(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} g_k(x)$ *(convergence simple).*
Si l'une des conditions suivantes est réalisée : $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \int_I \|g_k\| < +\infty$ *ou* $\int_I \sum\limits_{k=0}^{\infty} \|g_k\| < +\infty$ *alors* g *est intégrable sur* I *et on a :* $\int_I \|g\| \leqslant \sum\limits_{k=0}^{\infty} \int_I \|g_k\|$ *et*

$$\int_I g = \sum_{k=0}^{\infty} \int_I g_k.$$

Admis

Exemple : *(9)*

(1) : $$\int_{\to 0}^{\to+\infty} -\ln(1-e^{-t})\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\to 0}^{\to+\infty} \frac{e^{-nt}}{n}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2).$$

(2) : $$\int_{\to 0}^{\to+\infty} \ln(1+e^{-t})\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\to 0}^{\to+\infty} (-1)^{n+1}\frac{e^{-nt}}{n}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \eta(2) = \frac{1}{2}\zeta(2).$$

Contre-exemple avec $\sum_{n=0}^{\infty} \int_I \|f_n\| = +\infty$: *(10)*

$f_n(x) = (-1)^n \sin(x) 1_{[n\pi,(n+2)\pi]}(x)$.

III — Convergence dominée

Théorème de convergence dominée : cas réel positif : *(11)*

Soit (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$ continues par morceaux et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ continue par morceaux telles que :
(i) $\forall x \in I,\ f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$;
(ii) $\forall x \in I,\ \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant f_n(x) \leqslant \varphi(x)$;
(iii) $\displaystyle\int_I \varphi < +\infty$.
Alors $\displaystyle\int_I f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Admis

Théorème de convergence dominée : cas vectoriel : *(12)*

Soit (f_n) une suite de fonctions de I dans E continues par morceaux, $f : I \to E$ continue par morceaux et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ continue par morceaux telles que :
(i) $\forall x \in I,\ f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$;
(ii) $\forall x \in I,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \|f_n(x)\| \leqslant \varphi(x)$;
(iii) $\displaystyle\int_I \varphi < +\infty$.
Alors les f_n et f sont intégrables et on a $\displaystyle\int_I f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_I f$.

Admis

Exemple et contre exemple : *(13)*

Calcul de $\displaystyle\int_{\to 0}^{\to +\infty} e^{-t}\ln(t)\,\mathrm{d}t$

Soient $f(t) = e^{-t}\ln(t)$ *et* $f_n(t) = (1-\frac{t}{n})^n \ln(t) 1_{[0,n]}(t)$. *On a* $|f_n| \leqslant |f|$, $|f|$ *est intégrable sur* $]0,+\infty[$ *et* $f = \lim f_n$. *Donc* $\displaystyle\int_{]0,+\infty[} f = \lim_{n\to\infty} \int_{t=0}^{n} (1-\frac{t}{n})^n \ln(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} I_n$.

$$\begin{aligned}
I_n &= n\int_{u=0}^{1} (1-u)^n \ln(nu)\,\mathrm{d}u \\
&= \tfrac{n}{n+1}\Big([(1-(1-u)^{n+1})\ln(nu)]_{u=0}^{1} - \int_{u=0}^{1} (1+(1-u)+\cdots+(1-u)^n)\,\mathrm{d}u\Big) \\
&= \tfrac{n}{n+1}(\ln(n) - 1 - \tfrac{1}{2} - \cdots - \tfrac{1}{n+1}) \\
&\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\gamma.
\end{aligned}$$

Contre-exemple sans domination : $f_n = 1_{[n,n+1]}$.

Théorème de convergence dominée : cas d'un paramètre réel : *(14)*

Soient $J \subset \mathbb{R}$, $\lambda_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *adhérent à* J, $(f_\lambda)_{\lambda \in J}$ *une famille de fonctions de* I *dans* E *continues par morceaux,* $f : I \to E$ *continue par morceaux et* $\varphi : I \to \mathbb{R}$ *continue par morceaux telles que :*

(i) $\forall x \in I,\ f_\lambda(x) \underset{\lambda \to \lambda_0}{\longrightarrow} f(x)$;

(ii) $\forall x \in I, \forall \lambda \in J,\ \|f_\lambda(x)\| \leqslant \varphi(x)$;

(iii) $\displaystyle\int_I \varphi < +\infty$.

Alors les f_λ *et* f *sont intégrables et on a* $\displaystyle\int_I f_\lambda \underset{\lambda \to \lambda_0}{\longrightarrow} \int_I f$.

IV — Intégration terme à terme d'une série de fonctions

Exercice 2 : Des classiques

Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1 + t^2} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^2}.$$

$$\int_0^1 \frac{1}{t^t} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}.$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1}.$$

$$\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}.$$

V — Convergence dominée

Exercice 3 : Intégration terme à terme

Pour chaque égalité, vérifier que le théorème d'intégration terme à terme ne peut pas s'appliquer et montrer alors l'égalité en utilisant le théorème de convergence dominée.

$$\int_0^1 \frac{1}{1 + t^2} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

$$\int_0^1 \frac{t}{1 + t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}.$$

Exercice 4 : Intervertion limite et intégrale

Calculer les limites des suites dont les termes généraux sont les suivants :

$$a_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x dx$$

$$b_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^n + \mathrm{e}^x}$$

$$c_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{1 + x^{n+2}} dx$$

$$d_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{nt + t^2} \, \mathrm{d}t$$