Révisions d'algèbre linéaire

I — Généralités sur les espaces vectoriels

1) Sous espace vectoriel

Sous espace vectoriel F *(1)*

(1) : *Un sous espace vectoriel est une partie non vide, stable par combinaison linéaire.*
(2) : *Si A est une famille quelconque de vecteurs de E, $\operatorname{vect} A$ est un sous-espace vectoriel de E. Il s'agit du plus petit sous-espace vectoriel de E (pour l'inclusion) qui contienne A. C'est aussi l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels qui contiennent A.*
(3) : *On dit que A est une famille génératrice du s.e.v. G lorsque $G \subset \operatorname{vect}(A)$.*
(4) : *Toute sur-famille d'une famille génératrice de G est génératrice de G.*

2) Somme et somme directe de sous-espaces vectoriels

Somme de sous-espaces vectoriels *(2)*

(1) : *On appelle somme des sous-espaces (E_i) le sous-espace vectoriel $\operatorname{vect}(\bigcup_{i\in [\![1,n]\!]} E_i)$.*
Notation : $\sum_{i\in [\![1,n]\!]} E_i$.
(2) : *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, et $(E_i)_{i\in [\![1,n]\!]}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. Alors : $\sum_{i\in [\![1,n]\!]} E_i = \{x \in E \mid \exists(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n, x = x_1 + \cdots + x_n\}$.*

Somme directe de deux sous-espaces vectoriels *(3)*

Soit E un espace vectoriel et E_1, E_2 deux sous espaces de E.
(1) : *On dit que la somme des sous-espaces E_1 et E_2 est directe lorsque pour tout vecteur x de $E_1 + E_2$, il existe un* **unique** *(x_1, x_2) appartenant à $E_1 \times E_2$ tel que $x = x_1 + x_2$.* ***Notation :*** $E_1 \oplus E_2$.
(2) : **Caractérisations d'une somme directe de deux sous-espaces vectoriels :** *la somme $E_1 + E_2$ est directe si et seulement si :*
• *pour tout $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$, si $x_1 + x_2 = 0$ alors $x_1 = x_2 = 0$*
Dans le cas de la somme de deux sous-espaces vectoriels, on a aussi l'équivalence avec la condition
•• $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.

Sous-espaces vectoriels supplémentaires *(4)*

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E.
(1) : *Les sous-espaces E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E lorsque $E = E_1 \oplus E_2$.*
(2) : **Caractérisation de deux sous-espaces vectoriels supplémentaires ;** *$E = E_1 \oplus E_2$ si et seulement si $E = E_1 + E_2$ et $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.*
(3) : *Il n'y a aucune assurance de l'existence ou de l'unicité (dans le cas de l'existence) d'un supplémentaire d'un sous-espace vectoriel dans un espace vectoriel donné.*

II — Familles libres, génératrices et bases

1) Familles libres, liées, génératrices

Propriétés *(5)*

On se place dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Soit E' un sous-espace vectoriel de E et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Voici quelques propriétés concernant les familles libres, liées et génératrices :

(1) : *Tout système de vecteurs contenant le vecteur nul est lié.*

(2) : *Si on ajoute des vecteurs à une famille liée, on obtient une famille liée.*

(3) : *Une famille de vecteurs est liée si et seulement si un au moins des vecteurs de cette famille est combinaison linéaire des autres.*

(4) : *Si une famille de vecteurs $\mathfrak{L}$ est libre et que la famille $\mathfrak{L} \cup \{v\}$ est liée, alors $v \in \operatorname{vect} \mathfrak{L}$.*

(5) : *Tout vecteur combinaison linéaire de vecteurs d'une famille libre s'écrit de manière* **unique** *comme combinaison linéaire des vecteurs de cette famille.*

(6) : *L'image par une application linéaire $f \in \mathfrak{L}(E,F)$ d'une famille liée de E est une famille liée de F.*

(7) : *Si une famille de E a pour image une famille libre de F par une application linéaire $f \in \mathfrak{L}(E,F)$, alors la famille initiale est libre.*

(8) : *L'image par une application linéaire $f \in \mathfrak{L}(E,F)$* **injective** *d'une famille libre de E est une famille libre de F.*

(9) : *Toute sur-famille d'une famille génératrice de E' est génératrice de E'.*

(10) : *Si $\mathfrak{F}'$ est une famille de vecteurs obtenue à partir de $\mathfrak{F}$ par des opérations élémentaires, alors $\operatorname{vect}(\mathfrak{F}') = \operatorname{vect}(\mathfrak{F})$. Les opérations élémentaires sont les suivantes :*

- *Échanger deux vecteurs de $\mathfrak{F}$.*
- *Remplacer un vecteur $x \in \mathfrak{F}$ par λx si $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.*
- *Remplacer un vecteur $x \in \mathfrak{F}$ par la somme de x et d'une combinaison linéaire de $\mathfrak{F} \setminus \{x\}$.*

(11) : *Si $\mathfrak{F}$ est un système de vecteurs de E et $f \in \mathfrak{L}(E,F)$, alors $f(\operatorname{vect}(\mathfrak{F})) = \operatorname{vect}(f(\mathfrak{F}))$.*

(12) : *L'image par une application linéaire $f \in \mathfrak{L}(E,F)$ d'une famille génératrice de E est une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$ (mais* **pas de** *F a priori).*

(13) : *L'image par une application linéaire $f \in \mathfrak{L}(E,F)$* **surjective** *d'une famille génératrice de E est une famille génératrice de F.*

2) Bases

Définition *(6)*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. La famille de vecteurs est une **base** *de E lorsqu'elle est libre et génératrice de E.*

(1) : *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Si $\mathfrak{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ est une base de E, alors pour tout $x \in E$, il existe un unique $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^n x_i u_i$. On appelle ces scalaires les composantes ou les coordonnées de x dans la base $\mathfrak{B}$.*

Caractérisations des bases parmi les familles libres ou génératrices *(7)*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathfrak{F}$ une famille de vecteurs de E.

(1) : *Alors $\mathfrak{F}$ est une base de E si et seulement si l'une des deux propriétés suivantes est vraie :*

- *$\mathfrak{F}$ est une famille libre telle que toute sur-famille stricte de $\mathfrak{F}$ est liée, ou encore,*
- *$\mathfrak{F}$ est une famille génératrice telle que toute sous-famille stricte de $\mathfrak{F}$ n'est plus génératrice.*

(2) : *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathfrak{L}(E,F)$ et $\mathfrak{B}$ une base de E. Alors :*

- *f est injective si et seulement si $f(\mathfrak{B})$ est libre dans F,*
- *f est surjective si et seulement si $f(\mathfrak{B})$ est génératrice de F,*
- *f est bijective si et seulement si $f(\mathfrak{B})$ est une base de F.*

(3) : *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $\mathfrak{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ une base de E et $(w_1, \ldots, w_n)$ une famille quelconque de vecteurs de F. Alors il existe une unique application linéaire $f \in \mathfrak{L}(E,F)$ telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $f(u_i) = w_i$. Il s'agit de l'application $\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i \mapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i$.*

(4) : *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $\mathfrak{B}$ une base de E et $(f,g) \in \mathfrak{L}(E,F)^2$. Si f et g coïncident en chaque vecteur de $\mathfrak{B}$, alors $f = g$.*

Attention : *c'est faux si f n'est pas linéaire : $f(1)$ ne suffit pas à déterminer $f \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.*

III — Espaces vectoriels de dimension finie

1) Dimension finie

Théorème de la base incomplète *(8)*

(1) : *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit que E est de dimension finie lorsque E est $\{0\}$ ou bien s'il admet un système générateur de cardinal fini.*
(2) : *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathfrak{G}$ une famille génératrice quelconque de E, alors il existe $\mathfrak{G}_1 \subset \mathfrak{G}$ une famille génératrice de E et de cardinal fini.*
(3) : **Lemme de la base incomplète :** *soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, non réduit à $\{0\}$, $\mathfrak{L}$ une famille libre* **finie** *de E et $\mathfrak{G}$ une famille génératrice de E. Alors il existe une base $\mathfrak{B}$ de E, de cardinal fini, telle que $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{B} \subset (\mathfrak{G} \cup \mathfrak{L})$.*
(4) : **Théorème de la base incomplète :** *soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Si $(e_1, \ldots, e_p)$ est une famille libre de E, il existe $(e_{p+1}, \ldots, e_n) \in E^{n-p}$ tels que $(e_1, \ldots, e_n)$ soit une base de E.*
(5) : *Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0\}$ admet une base de cardinal fini.*
(6) : *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathfrak{G}$ une famille génératrice de E. Alors il existe une base de E contenue dans $\mathfrak{G}$.*

Notion de dimension *(9)*

(1) : *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, non réduit à $\{0\}$. Alors E admet une base de cardinal fini n et toute partie libre de E a au plus n éléments.*
(2) : *Théorème de la dimension : soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, non réduit à $\{0\}$. Toutes les bases de E ont même cardinal, appelé dimension de E.* ***Notation :*** $\dim E$*. Par convention* $\dim\{0\} = 0$.
(3) : *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Alors toute famille génératrice de E a au moins n éléments.*
(4) : **Caractérisation des bases parmi les familles libres ou génératrices** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $\mathfrak{F}$ une famille de vecteurs de E. Si deux des trois énoncés suivants sont vrais, il en est alors de même du troisième :*
- *$\mathfrak{F}$ est libre*
- *$\mathfrak{F}$ est génératrice*
- $\mathrm{Card}\,\mathfrak{F} = n$

(5) : *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies. Alors E et F sont isomorphes si et seulement si* $\dim E = \dim F$.

2) Sous-espaces vectoriels en dimension finie. Notion de rang

Formule de Grassman *(10)*

(1) : *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et E' un sous-espace vectoriel de E. Alors :*
- *E' est de dimension finie et $\dim E' \leqslant \dim E$. Il y a égalité des dimensions si et seulement si $E = E'$.*
- *E' admet au moins un supplémentaire dans E, de dimension $\dim E - \dim E'$.*

(2) : *Il n'y a pas d'unicité d'un tel supplémentaire, mais ils ont tous même dimension.*
(3) : **Formule de Grassmann :** *soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Alors $\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2)$.*

Caractérisation de deux supplémentaires en dimension finie *(11)*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Alors les trois propositions suivantes sont équivalentes :
- $E = E_1 \oplus E_2$,
- $E_1 \cap E_2 = \{0\}$ *et* $\dim E_1 + \dim E_2 = \dim E$,
- $E_1 + E_2 = E$ *et* $\dim E_1 + \dim E_2 = \dim E$.

Rang d'une famille de vecteurs *(12)*

(1) : *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathfrak{F}$ une famille de vecteurs de E. Si* $\operatorname{vect}\mathfrak{F}$ *est de dimension finie, on appelle rang de $\mathfrak{F}$ cette dimension.* ***Notation :*** $\operatorname{rg}\mathfrak{F}$.

(2) : *On se place dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Soit $\mathfrak{F}$ une famille finie de vecteurs. Alors :*

— *$\mathfrak{F}$ est de rang fini et* $\operatorname{rg}\mathfrak{F} \leqslant \operatorname{Card}\mathfrak{F}$.

— *$\mathfrak{F}$ est libre si et seulement si* $\operatorname{rg}\mathfrak{F} = \operatorname{Card}\mathfrak{F}$.

— *Si* $\operatorname{rg}\mathfrak{F} \geqslant 1$, *alors il existe une famille libre $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{F}$ telle que* $\operatorname{Card}\mathfrak{B} = \operatorname{rg}\mathfrak{F}$. *Il s'agit d'une base de* $\operatorname{vect}\mathfrak{F}$.

— *Les opérations élémentaires sur la famille $\mathfrak{F}$ ne modifient pas son rang.*

— *L'image par une application linéaire injective (en particulier par un isomorphisme) de $\mathfrak{F}$ a même rang que $\mathfrak{F}$.*

Rang d'une application linéaire *(13)*

(1) : *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que* $\operatorname{Im} f$ *soit de dimension finie. On appelle rang de f la dimension de* $\operatorname{Im} f$. ***Notation :*** $\operatorname{rg} f$.

(2) : *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors :*

— *Si F est de dimension finie, alors f est de rang fini et* $\operatorname{rg} f \leqslant \dim F$.

— *Si F est de dimension finie et si f est* **surjective**, *alors* $\operatorname{rg} f = \dim F$.

— *Si $\mathfrak{G}$ est un système générateur de E et si f est de rang fini alors* $\operatorname{rg} f = \dim(\operatorname{vect} f(\mathfrak{G}))$.

— *Si E est de dimension finie, alors f est de rang fini et* $\operatorname{rg} f \leqslant \dim E$,

— *Si f est de rang fini, composer f à gauche ou à droite par un isomorphisme ne modifie pas son rang.*

(3) : **Théorème du rang** *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On suppose que E est de dimension finie. Alors* $\dim(\operatorname{Ker} f) + \operatorname{rg} f = \dim E$.

(4) : *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On suppose que E est de dimension finie. Alors f est injective si et seulement si* $\operatorname{rg} f = \dim E$.

(5) : *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finies* **égales** *et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

— *f est injective*

— *f est surjective*

— *f est bijective*

— *l'image par f d'une base de E est une base de F*

— $\operatorname{rg} f = \dim F (= \dim E ...)$

Exercice 1 : Sev de $\mathbb{K}^3$ engendrés par deux vecteurs

On considère les vecteurs de $\mathbb{K}^3$: $a = (1,2,1)$, $b = (1,3,2)$, $c = (1,1,0)$, $d = (3,8,5)$.
Soient $F = \operatorname{vect}(a,b)$ et $G = \operatorname{vect}(c,d)$. Comparer F et G.

Exercice 2 : Essai de bases

Montrer que dans $\mathbb{R}^3$, les trois vecteurs $a = (1,0,1)$, $b = (-1,-1,2)$ et $c = (-2,1,-2)$ forment une base, et calculer les coordonnées dans cette base d'un vecteur $X = (x,y,z)$.

Exercice 3 : Rang de vecteurs

Dans $\mathbb{R}^4$, trouver le rang de la famille de vecteurs :

$$a = (3,2,1,0), \quad b = (2,3,4,5), \quad c = (0,1,2,3), \quad d = (1,2,1,2), \quad e = (0,-1,2,1).$$

Exercice 4 : Étude de liberté

Étudier dans E la liberté des familles suivantes :

(1) : $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\mathcal{F} = (\sin, \cos)$.

(2) : $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}^{+*},\mathbb{R})$, $\mathcal{F} = (f_a : x \mapsto x^a)$, $a \in \mathbb{R}$.

(3) : $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\mathcal{F} = (f_a : x \mapsto |x-a|)$, $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 5 : Modification des vecteurs d'une famille libre

Soit E un espace vectoriel, $(x_1, \dots, x_n)$ une famille libre de vecteurs de E, et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des scalaires.
On pose $y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, et $x'_i = x_i + y$. Étudier à quelle condition la famille $(x'_1, \dots, x'_n)$ est libre.

Exercice 6 : Fonctions affines par morceaux

Soit $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$ *une subdivision de* $[0,1]$ *et* F *l'ensemble des fonctions* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *continues dont la restriction à chaque intervalle* $[x_i, x_{i+1}]$ *est affine. Montrer que* F *est de dimension finie et trouver une base de* F.

Exercice 7 : Somme de sous-espaces

Soient F, G, H *trois sous-espaces d'un espace vectoriel* E. *Comparer* $F \cap (G + (F \cap H))$ *et* $(F \cap G) + (F \cap H)$.

Exercice 8 : $F \cap G = F' \cap G'$

Soient F, G, F', G' *des sev d'un ev* E.
Montrer que si $F \cap G = F' \cap G'$ *alors* $(F + (G \cap F')) \cap (F + (G \cap G')) = F$.

Exercice 9 : Projection et symétrie dans $\mathbb{K}^3$

Dans $\mathbb{K}^3$, *on donne les sous espaces :* $H = \{X = (x, y, z)$ *tel que* $x + y + z = 0\}$ *et* $K = \operatorname{vect}(U = (1, 1, 2))$.
(1) : *Déterminer* $\dim H$ *et en donner une base.*
(2) : *Démontrer que* $H \oplus K = \mathbb{K}^3$.
(3) : *Donner les expressions analytiques des projection et symétrie associées :* π_H *et* s_H.

Exercice 10 : sev de $\mathbb{K}_3[x]$

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *et* $E = \mathbb{K}_3[X]$,
$F = \{P \in E$ *tq* $P(0) = P(1) = P(2) = 0\}$,
$G = \{P \in E$ *tq* $P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$,
et $H = \{P \in E$ *tq* $P(X) = P(-X)\}$.
(1) : *Montrer que* $F \oplus G = \{P \in E$ *tq* $P(1) = P(2) = 0\}$.
(2) : *Montrer que* $F \oplus G \oplus H = E$.

Exercice 11 : Somme directe dans $E \Rightarrow$ somme directe dans $\mathcal{L}(E)$

Soit $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$ *et* $\mathcal{F}_i = \{u \in \mathcal{L}(E)$ *tq* $\operatorname{Im} u \subset F_i\}$. *Montrer que* $\mathcal{F}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{F}_n = \mathcal{L}(E)$.

Exercice 12 : Toute somme peut être rendue directe en réduisant les sev

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-ev de dimension finie,* $F_1, F_2, \ldots, F_n$ *des sev de* E *tels que* $F_1 + \ldots + F_n = E$.
Montrer qu'il existe des sev $G_1 \subset F_1$, ..., $G_n \subset F_n$ *tels que* $G_1 \oplus G_2 \oplus \ldots \oplus G_n = E$.

Exercice 13 : Somme et intersection

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-ev,* $E_1, \ldots, E_n$ *des sev tels que* $E_1 \oplus \ldots \oplus E_n = E$, F *un autre sev de* E, *et* $F_i = E_i \cap F$.
(1) : *Montrer que la somme* $G = F_1 + \ldots + F_n$ *est directe.*
(2) : *Comparer* F *et* G.

Exercice 14 : Polynômes trigonométriques

Soit E *l'ev* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, F *le sev engendré par les fonctions* $f_n : x \mapsto \cos(nx)$, $n \in \mathbb{N}$, *et* G *le sev engendré par les fonctions* $g_n : x \mapsto \cos^n x$, $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que $F = G$.

Exercice 15 : Supplémentaires

Soit $E = H \oplus K$ *et* $(e_1, \ldots, e_k)$ *une base de* K.
(1) : *Montrer que pour tout* $a \in H$, $K_a = \operatorname{vect}(e_1 + a, \ldots, e_k + a)$ *est un supplémentaire de* H.
(2) : *Montrer que si* $a \neq b$, *alors* $K_a \neq K_b$.

Exercice 16 : Nombres algébriques

On considère que $\mathbb{R}$ *est un* $\mathbb{Q}$*-espace vectoriel.*
(1) : *Montrer que la famille* $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ *est libre.*
(2) : *Montrer que la famille* $(\ln p)$ *où* p *décrit l'ensemble des nombres premiers positifs est libre.*

IV — Applications linéaires

1) Généralités

Structure des ensembles d'applications linéaires *(1)*

Soient E, F et G des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

(1) : *On dit que $f : E \to F$ est linéaire lorsque $\forall (x,y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, f(x+\lambda y) = f(x) + \lambda f(y)$.*
Alors l'image par f d'une combinaison linéaire dans E est la combinaison linéaire des images dans F.

(2) : $(\mathcal{L}(E,F), +, \cdot)$ *est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, sous-espace vectoriel de $\mathfrak{F}(E,F)$.*

(3) : *Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$. Alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$.*

(4) : *Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ un isomorphisme. Alors $f^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)$.*

(5) : $(\mathcal{L}(E), +, \circ, \cdot)$ *est une $\mathbb{K}$-algèbre (***non*** commutative en général).*

(6) : $(\mathrm{GL}(E), \circ)$, $(O(E), \circ)$ *et* $(SO(E), \circ)$ *sont des groupes (non commutatifs en général).*

Applications linéaires et sous-espaces vectoriels *(2)*

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, E_1, E_2 des sous-espace vectoriels de E, F_1, F_2 des sous-espace vectoriels de F et $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

(1) : *$f(E_1)$ est un sous-espace vectoriel de F. Cas particulier :* $\operatorname{Im} f$ *est un sous-espace vectoriel de F.*

(2) : *$f^{-1}(F_1)$ est un sous-espace vectoriel de E. Cas particulier :* $\operatorname{Ker} f = f^{-1}(\{0\})$ *est un sous-espace vectoriel de E.*

(3) : *f est injective si et seulement si* $\operatorname{Ker} f \subset \{0\}$.

(4) : **Recollement linéaire** *Pour tout couple f_1 et f_2 d'applications linéaires de E_1 et E_2 dans F, il existe une unique application linéaire f de E dans F telle que, pour tout i, f_i soit la restriction de f à E_i.*

(5) : **Théorème fondamental d'isomorphisme** *Si* $\operatorname{Ker} f$ *admet le sous-espace vectoriel H pour supplémentaire dans E. Alors $f_{/H}^{\backslash \operatorname{Im} f}$ est un isomorphisme.*

2) Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel E

Homothéties vectorielles *(3)*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$.

(1) : *L'application $x \mapsto \lambda_1 x$ est un endomorphisme de E appelé homothétie vectorielle de rapport λ_1 sur E.* ***Notation :*** h_{λ_1}.

(2) : $h_{\lambda_2} \circ h_{\lambda_1} = h_{\lambda_2 \lambda_1}$.

(3) : *Si $\lambda_1 \neq 0$, alors $h_{\lambda_1} \in \mathrm{GL}(E)$, et $(h_{\lambda_1})^{-1} = h_{\lambda_1^{-1}}$.*

Projecteurs *(4)*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et E_1 et E_2 deux sous-espaces de E supplémentaires. Pour tout $x \in E$, il existe un unique $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ tel que $x = x_1 + x_2$.

(1) : *L'application $p_1 : E \to E$; $x \mapsto x_1$ (resp. $p_2 : E \to E$; $x \mapsto x_2$) est le projecteur de E sur E_1 parallèlement à E_2 (resp. sur E_2 parallèlement à E_1).*

(2) : $p_1 + p_2 = \mathrm{id}_E$ *et* $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1 = 0$.

(3) : *Si p est un projecteur de E, alors $p \in \mathcal{L}(E)$.*

(4) : *Si p est un projecteur de E, alors c'est le projecteur sur* $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$ *parallèlement à* $\operatorname{Ker} p$.

(5) : **Caractérisation des projecteurs :** *soit $f \in \mathcal{L}(E)$. f est un projecteur de E si et seulement si $f \circ f = f$ (propriété d'idempotence).*

Symétries vectorielles *(5)*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et E_1 et E_2 deux sous-espaces de E supplémentaires. Pour tout $x \in E$, il existe un unique $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ tel que $x = x_1 + x_2$.

(1) : *L'application $s_1 : E \to E \; ; \; x \mapsto x_1 - x_2$ (resp. $s_2 : E \to E \; ; \; x \mapsto -x_1 + x_2$) est la symétrie vectorielle de E par rapport à E_1 parallèlement à E_2 (resp. par rapport à E_2 parallèlement à E_1).*

(2) : $s_1 = p_1 - p_2 = -s_2$ *et* $s_1 + \mathrm{id}_E = 2p_1$.

(3) : *Si s est une symétrie vectorielle de E, alors $s \in \mathcal{L}(E)$.*

(4) : *Si s est une symétrie vectorielle de E, alors c'est la symétrie vectorielle par rapport à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.*

(5) : **Caractérisation des symétries vectorielles :** *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors f est une symétrie vectorielle de E si et seulement si $f \circ f = \mathrm{id}_E$ (propriété d'involution).*

(6) : *Une symétrie vectorielle sur E est un automorphisme de E.*

Formes linéaires *(6)*

(1) : *Une forme linéaire est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$. On note E^* leur ensemble.*

(2) : **Classification des formes linéaires :** *une forme linéaire sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est nulle ou bien surjective.*

(3) : *Un hyperplan vectoriel H d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel qui admet une droite vectorielle pour supplémentaire dans E.*

(4) : *Caractérisation d'un hyperplan vectoriel : un sous-espace vectoriel H de E est un hyperplan vectoriel si et seulement si l'une des deux propriétés suivantes est vraie :*

- *il existe une forme linéaire non nulle ϕ telle que $\mathrm{Ker}\,\phi = H$, ou encore,*
- *pour tout $a \in E \setminus H$, $E = H \oplus \mathbb{K}a$.*

(5) : *Si H désigne un hyperplan de l'espace vectoriel E et $a \in E \setminus H$, il existe une unique forme linéaire ϕ sur E telle que $\mathrm{Ker}\,\phi = H$ et $\phi(a) = 1$.*

(6) : *Deux formes linéaires non nulles ont même noyau si et seulement si elles sont proportionnelles.*

Trace *(7)*

(1) : *La trace d'une matrice carrée A est égale à la somme de ses termes diagonaux.* ***Notation :*** *Tr A.*

(2) : *Tr (AB) = Tr (BA) mais Tr (ABC) = Tr (CAB) = Tr $(BCA) \neq$ Tr (CBA) en général !*

(3) : *Tr A = Tr $({}^tA)$*

(4) : *L'application $(A, B) \mapsto$ Tr $({}^tAB)$ est un produit scalaire (canonique) sur $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.*

Matrices semblables *(8)*

(1) : *Deux matrices carrées A et B sont semblables si et seulement s'il existe une matrice inversible P telle que $A = PBP^{-1}$.* ***Notation :*** *$A \sim B$.*

(2) : *La relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur les matrices appelée relation de similitude.*

(3) : *La trace est un invariant de similitude.*

V — Rang

1) Rang d'une matrice

Rang *(9)*

(1) : *Soit $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. Le rang de A est le rang des p vecteurs colonnes $A_1, \ldots, A_p$ de A dans $\mathbb{K}^q$, c'est à dire* $\dim Vect(A_1, \ldots, A_p)$. ***Notation :*** $\operatorname{rg} A$.
(2) : *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies p et q, $\mathcal{U}$ une base de E, $\mathcal{V}$ une base de F et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On note $A = \mathfrak{M}_{\mathcal{U},\mathcal{V}} f \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ la matrice de f dans les bases $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$.* Alors $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} f$.
(3) : $\operatorname{rg}(AB) \leqslant \min(\operatorname{rg}(A), \operatorname{rg}(B))$.
(4) : *Le rang d'une sous-matrice est inférieur ou égal au rang de la matrice.*
(5) : *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\operatorname{rg} A = n$ si et seulement si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.*
(6) : *Soit $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$, $P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathrm{GL}_q(\mathbb{K})$. Alors $\operatorname{rg} QA = \operatorname{rg} A$ et $\operatorname{rg} AP = \operatorname{rg} A$.*
(7) : *Les opérations élémentaires sur une matrice ne modifient pas le rang de cette matrice.*
(8) : $\operatorname{rg}(M) \geqslant r \Longleftrightarrow M$ *contient une sous-matrice carrée de taille r inversible.*
(9) : $\operatorname{rg}(M)$ *est la plus grande taille d'une sous-matrice carrée inversible extraite de M.*
(10) : *Soient $A, A' \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. On dit que A et A' sont équivalentes lorsqu'il existe $P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathrm{GL}_q(\mathbb{K})$ telles que $A' = QAP$.*
(11) : *La relation d'équivalence sur les matrices de $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ est une relation d'équivalence (réflexive, symétrique et transitive).*
(12) : *Soit $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. Alors A est de rang r si et seulement s'il existe $P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathrm{GL}_q(\mathbb{K})$ telle que $A = QJ_rP$, où $J_r \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ désigne la matrice :*

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(13) : *Deux matrices de $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.*
(14) : *Soit $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. Alors $\operatorname{rg}{}^t A = \operatorname{rg} A$.*

Révisions sur les applications linéaires MPSI

Propriétés élémentaires

Exercice 1 : Effet sur les familles libres et génératrices

Soient E, F deux espaces vectoriels et $f : E \to F$ linéaire.
(1) : *Montrer que f est injective si et seulement si f transforme toute famille libre de E en une famille libre de F.*
(2) : *Montrer que f est surjective si et seulement s'il existe une famille génératrice de E transformée par f en une famille génératrice de F.*

Exercice 2 : $\mathcal{L}(E \times F)$

Est-il vrai que $\mathcal{L}(E \times F)$ et $\mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(F)$ sont isomorphes ? (E et F espaces vectoriels de dimensions finies).

Exercice 3 : Somme directe d'endomorphismes

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $E_1, \ldots, E_n$ des sev tels que $E_1 \oplus \ldots \oplus E_n = E$. Soient $u_1 \in \mathcal{L}(E_1)$, ..., $u_n \in \mathcal{L}(E_n)$.
(1) : *Montrer qu'il existe un unique endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout i : $u_{|E_i} = u_i$.*
(2) : *Montrer que* $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Ker}(u_1) \oplus \ldots \oplus \operatorname{Ker}(u_n)$ *et* $\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Im}(u_1) \oplus \ldots \oplus \operatorname{Im}(u_n)$.

Exercice 4 : Endomorphisme tel que tout vecteur non nul est propre

Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.

1. *Montrer que si $x \neq 0$, il existe un unique scalaire λ_x tel que $f(x) = \lambda_x x$.*
2. *Comparer λ_x et λ_y lorsque (x, y) est libre.*
3. *Montrer que f est une homothétie.*
4. *Soit E un espace de dimension finie. Trouver les endomorphismes (resp. automorphismes) de E qui commutent avec tous les endomorphismes (resp. automorphismes) de E.*
   (pour x non nul, on pourra envisager la symétrie s par rapport à $Vect(x)$ parallèlement à un supplémentaire dans E de $Vect(x)$)

Projections

Exercice 5 : Valeurs propres d'une projection

Soit E un espace vectoriel et $p \in \mathcal{L}(E)$ une projection. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{-1\}$, $\mathrm{id}_E + \lambda p$ est un isomorphisme de E.

Exercice 6 : $f \circ g = \mathrm{id}$

Soit E un espace vectoriel et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = \mathrm{id}_E$. Montrer que $g \circ f$ est une projection et déterminer ses espaces caractéristiques.

Exercice 7 : Projection $p + q - q \circ p$

Soient p, q deux projections telles que $p \circ q = 0$. Montrer que $p + q - q \circ p$ est une projection, et déterminer ses espaces caractéristiques.

Exercice 8 : Endomorphisme de rang 1

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1. Montrer qu'il existe un unique $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f^2 = \lambda f$.
Montrer que : $\lambda = 1 \Leftrightarrow \mathrm{id} - f$ est non injective $\Leftrightarrow \mathrm{id} - f$ est non surjective (même en dimension infinie).

Exercice 9 : Commutant d'une projection

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, F, G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$. On note p la projection sur F parallèlement à G. Soit $E_p = \{f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ p = p \circ f\}$. Quelle est la dimension de E_p ?

Exercice 10 : Expressions analytiques

Soit $E = \mathbb{K}^3$, $F = \{X = (x, y, z)$ tel que $x + 2y + z = 0\}$ et $G = \mathrm{vect}((1, 1, 1))$.
(1) : *Vérifier que $F \oplus G = E$.*
(2) : *Soit s la symétrie de base F de direction G et $u = (x, y, z)$. Déterminer $s(u)$.*

Rang

Exercice 11 : Applications du thm du rang

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-ev de dimensions finies et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
(1) : *Montrer que si H est un sev de E, alors $\dim f(H) = \dim H - \dim(H \cap \operatorname{Ker} f)$.*
(2) : *Montrer que si K est un sev de F, alors $\dim f^{-1}(K) = \dim(K \cap \operatorname{Im} f) + \dim(\operatorname{Ker} f)$.*

Exercice 12 : Application du thm du rang

Soient E, F deux ev de dimensions finies et $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$.
Montrer que $\dim(\operatorname{Ker}(u + v)) \leqslant \dim(\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v) + \dim(\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v)$ (considérer $w = u_{|\operatorname{Ker}(u+v)}$).

Exercice 13 : Rang de $f \circ g$

Soit E un ev de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Établir :
(1) : $\dim \operatorname{Ker}(f \circ g) \leqslant \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Ker} g$.
(2) : $\dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g) = \mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g \circ f)$.
(3) : $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) - \dim E \leqslant \mathrm{rg}(f \circ g) \leqslant \min(\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g))$.

Exercice 14 : $f \circ g = 0$

Soit E un ev de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = 0$. Trouver une inégalité liant les rangs de f et de g. Peut-on avoir égalité ?

Exercice 15 : Somme de projecteurs

Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle, E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $p_1, \ldots, p_n$ des projecteurs tels que $p_1 + \ldots + p_n = \mathrm{id}_E$.
(1) : *Montrer que $Tr\,(p_i) = \mathrm{rg}(p_i)$.*
(2) : *Montrer que $E = \mathrm{Im}(p_1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Im}(p_n)$.*

Image et noyau

Exercice 16 : $f(\operatorname{Ker}(g\circ f))$

Soit E un espace vectoriel et $f,g\in\mathcal{L}(E)$. Montrer que $f(\operatorname{Ker}(g\circ f))=\operatorname{Ker} g\cap\operatorname{Im} f$.

Exercice 17 : Supplémentaire d'un hyperplan

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $f:E\to\mathbb{K}$ une forme linéaire non identiquement nulle. On note $H=\operatorname{Ker} f$.
(1) : *Montrer que $\operatorname{Im} f=\mathbb{K}$.*
(2) : *Soit $u\in E\setminus H$ et $F=\operatorname{vect}(u)$. Montrer que $F\oplus H=E$.*

Exercice 18 : CNS pour que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ soient supplémentaires

Soit E un ev de dimension finie et $f\in\mathcal{L}(E)$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
(1) $\operatorname{Ker} f^2=\operatorname{Ker} f$.
(2) $\operatorname{Im} f^2=\operatorname{Im} f$.
(3) $\operatorname{Ker} f\oplus\operatorname{Im} f=E$.
(4) $\operatorname{Ker} f\cap\operatorname{Im} f=\{0\}$.
(5) $\operatorname{Ker} f+\operatorname{Im} f=E$.

Exercice 19 : $\operatorname{Ker} f+\operatorname{Ker} g=\operatorname{Im} f+\operatorname{Im} g=E$

Soient E un ev de dimension finie et $f,g\in\mathcal{L}(E)$ tels que $\operatorname{Ker} f+\operatorname{Ker} g=\operatorname{Im} f+\operatorname{Im} g=E$. Montrer que les sommes sont directes.

Exercice 20 : Noyaux itérés

Soit E un ev de dimension finie et $f\in\mathcal{L}(E)$. On pose $N_k=\operatorname{Ker}(f^k)$ et $I_k=\operatorname{Im}(f^k)$.
(1) : *Montrer que la suite (N_k) est croissante pour l'inclusion et que la suite (I_k) est décroissante.*
(2) : *Soit p tel que $N_p=N_{p+1}$. Justifier l'existence de p et montrer que $N_{p+1}=N_{p+2}=\ldots=N_{p+k}=\ldots$*
(3) : *Montrer que les suites (N_k) et (I_k) sont stationnaires à partir du même rang p.*
(4) : *Montrer que $N_p\oplus I_p=E$.*
(5) : *Montrer que la suite $(\dim(N_{k+1})-\dim(N_k))$ est décroissante.*

Équations algébriques

Exercice 21 : $f^2=-\operatorname{id}$

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et $f\in\mathcal{L}(E)$ tel que $f\circ f=-\operatorname{id}_E$. Pour $z=x+iy\in\mathbb{C}$ et $u\in E$, on pose $zu=xu+yf(u)$.
(1) : *Montrer qu'on définit ainsi une structure de $\mathbb{C}$-ev sur E.*
(2) : *En déduire que $\dim_{\mathbb{R}}(E)$ est paire.*

Exercice 22 : $f^3=\operatorname{id}$

Soit $f\in\mathcal{L}(E)$ tel que $f^3=\operatorname{id}_E$.
(1) : *Montrer que $\operatorname{Ker}(f-\operatorname{id})\oplus\operatorname{Im}(f-\operatorname{id})=E$.*
(2) : *Montrer que $\operatorname{Ker}(f-\operatorname{id})=\operatorname{Im}(f^2+f+\operatorname{id})$ et $\operatorname{Im}(f-\operatorname{id})=\operatorname{Ker}(f^2+f+\operatorname{id})$.*

Exercice 23 : Endomorphisme cyclique

Soit E un ev de dimension n et $f\in\mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe un vecteur $u\in E$ tel que la famille $(f^k(u))_{k\in\mathbb{N}}$ engendre E.
(1) : *Montrer que $(u,\ldots,f^{n-1}(u))$ est une base de E (considérer p maximal tel que $\mathcal{F}=(u,\ldots,f^{p-1}(u))$ est libre, et prouver que $f^k(u)$ est combinaison linéaire de $\mathcal{F}$ pour tout entier k).*
(2) : *Montrer qu'un endomorphisme $g\in\mathcal{L}(E)$ commute avec f si et seulement si c'est un polynôme en f.*

Exercice 24 : Endomorphisme cyclique

Soit $f\in\mathcal{L}(E)$. On dit que f est un endomorphisme cyclique s'il existe $x\in E$ tel que $E=\langle f^k(x),\ k\in\mathbb{N}\rangle$. Si f est cyclique et F est un sous-espace vectoriel stable par f, montrer que $f_{|F}$ est aussi cyclique.

Exercice 25 : $f^3=0$

Soit E de dimension finie et $f\in\mathcal{L}(E)$ tel que $f^3=0$.
(1) : *Montrer que $\operatorname{rg} f+\operatorname{rg} f^2\leqslant\dim E$.*
(2) : *Montrer que $2\operatorname{rg} f^2\leqslant\operatorname{rg} f$ (appliquer le théorème du rang à $f_{|\operatorname{Im} f}$).*